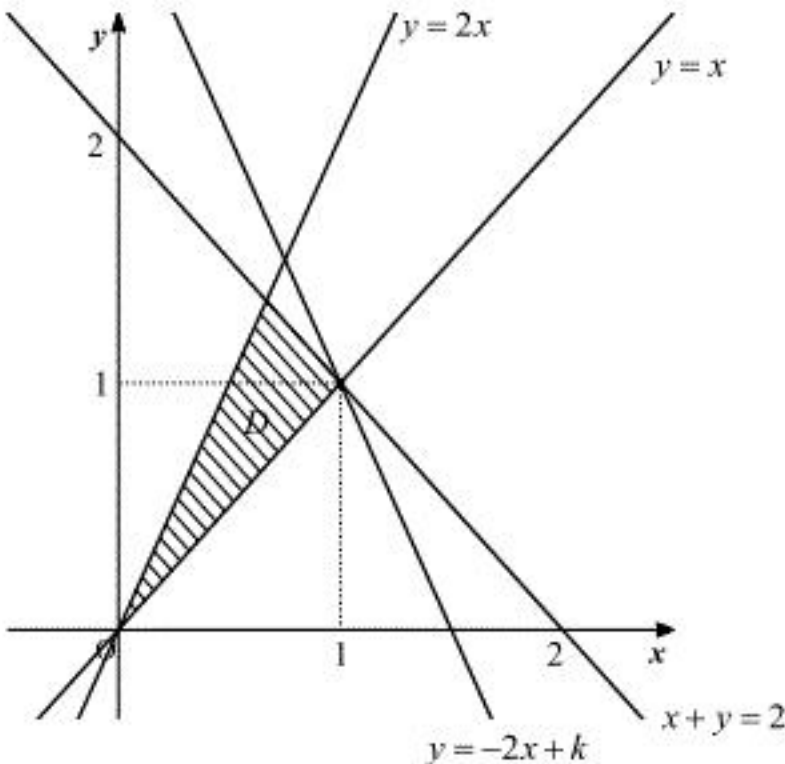


問題 1

- (1) 座標平面において、 $y \geq x$ 、 $y \leq 2x$ 、 $x+y \leq 2$ を全て満たす領域を D とおく。



D を図示すると上図の斜線部となる。ただし境界上の点を含む。ここで、 $2x+y=k$ とおくと、 $y=-2x+k$ であり、これは座標平面上において傾きが -2 、 y 切片が k の直線を表す。この直線が領域 D と共通部分を持つような k の最大値を求めればよい。直線 $y=-2x+k$ は直線 $x+y=2$ 、すなわち $y=-x+2$ より傾きが小さいので、 k が最大となるのは、上図のように直線 $y=-2x+k$ が点 $(1,1)$ を通る場合で、このとき $k=2 \cdot 1+1=3$ である。よって、 k は $x=1, y=1$ のときに最大値 3 をとる。

(答) 3

- (2)

$\triangle ABC$ において、余弦定理より $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ であり、正弦定理より $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 、すなわち $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$ である。これを与えられた条件式に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\sin C}{2\sin B} \\ \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &= \frac{c}{2b} \\ \Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 \end{aligned}$$

を得る。 $a>0, b>0$ より、 $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ であるから、 $\triangle ABC$ は $BC=CA$ の二等辺三角形である。逆に $\triangle ABC$ が $BC=CA$ の二等辺三角形であるとき、 $a=b$ より、 $\cos A = \frac{c}{2b}$ となり、

$$\cos A = \frac{\sin C}{2\sin B} \text{ が確かに成り立つ。}$$

(答) $BC=CA$ の二等辺三角形

- (3)

真数条件より $x>0$ であり、 $\log_x 16$ の底に関する条件より $x \neq 1$ である。よって、 $t = \log_2 x$ とおくと、 $t \neq 0$ であり、さらに $\log_x 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x} = \frac{4}{t}$ であるから、与不等式は

$$\begin{aligned} \log_2 x - \log_x 16 - 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow t - \frac{4}{t} - 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(t+1)(t-4)}{t} &\leq 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 t の正負に関する場合分けを考える。

- [1] $t<0$ のとき
①は $(t+1)(t-4) \geq 0$ と変形できるから、 $t<0$ に注意すると $t \leq -1$ である。
- [2] $t>0$ のとき
①は $(t+1)(t-4) \leq 0$ と変形できて、 $-1 \leq t \leq 4$ が得られる。これと $t>0$ との共通部分を考えて $0<t \leq 4$ である。
- [1], [2] をまとめると、不等式①を満たす t は
 $t \leq -1, 0<t \leq 4$

となる。 $\log_2 x = -1, 0, 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, 1, 16$ であり、底 2 は 1 より大きいから、求める x の範囲は

$$0 < x \leq \frac{1}{2}, 1 < x \leq 16$$

である。

(答) $0 < x \leq \frac{1}{2}, 1 < x \leq 16$

- (4)

x, y, z が正の実数であるとき、 x, y について相加平均と相乗平均の関係より、

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (\text{等号は } x=y \text{ のとき成立})$$

である。また、同様にして

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \quad (\text{等号は } y=z \text{ のとき成立})$$

であり、

$$\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx} \quad (\text{等号は } z=x \text{ のとき成立})$$

である。これら3つの不等式の辺々を足し合わせると

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} &\geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \\ \Leftrightarrow x+y+z &\geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、1つ目の不等式が示された。ここで、等号は $x=y$ かつ $y=z$ かつ $z=x$ 、すなわち $x=y=z$ のとき成立する。

また、 $\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx}$ もそれぞれ正の実数だから、不等式①の x を $\sqrt{xy}$ に、 y を $\sqrt{yz}$ に、 z を $\sqrt{zx}$ に置き換えても不等式は成立する。よって、

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} &\geq \sqrt{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz}} + \sqrt{\sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx}} + \sqrt{\sqrt{zx} \cdot \sqrt{xy}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} &\geq \sqrt{x\sqrt{yz}} + \sqrt{y\sqrt{zx}} + \sqrt{z\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

となり、2つ目の不等式が示された。等号は $\sqrt{xy} = \sqrt{yz} = \sqrt{zx}$ のとき成立するが、これは

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &= \sqrt{yz} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{z} \\ \Leftrightarrow x &= z \end{aligned}$$

であることと、同様に

$$\begin{aligned} \sqrt{yz} &= \sqrt{zx} \Leftrightarrow y = x \\ \sqrt{zx} &= \sqrt{xy} \Leftrightarrow z = y \end{aligned}$$

であることから、結局まとめると等号条件は $x=y=z$ である。

(証明終)

(答) 等号成立条件:1つ目、2つ目の不等式ともに $x=y=z$

問題 2

(1)

$S(t)=\int_0^t|x(x-2)|dx$ である。ここで、絶対値内部の正負に関する場合分けを考える。

[1] $0< t < 2$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \{-x(x-2)\} dx \\ &= \int_0^t (-x^2+2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3+t^2 \end{aligned}$$

である。

[2] $2 \leq t$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^2 \{-x(x-2)\} dx + \int_2^t x(x-2) dx \\ &= \frac{1}{6}(2-0)^3 + \int_2^t (x^2-2x) dx \\ &= \frac{4}{3} + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^t \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}t^3 - t^2 - \frac{8}{3} + 4 \\ &= \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad S(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3}t^3+t^2 & (0<t<2 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{8}{3} & (2\leq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

(1)の結果より、 $0< a < 2$ の場合と $2 < a$ の場合に分けて考える。

[1] $0 < a < 2$ のとき

$S(t)=-\frac{1}{3}t^3+t^2$ より $S'(t)=-t^2+2t$ である。題意を満たす接点において $S'(a)=3$ が成り立

つことから、 $S'(a)=3$ とすると、

$$\begin{aligned} -a^2+2a &= 3 \\ \Leftrightarrow a^2-2a+3 &= 0 \\ \therefore a &= 1 \pm \sqrt{2}i \end{aligned}$$

となるが、これは a が実数であることに反するので不適である。

[2] $2 < a$ のとき

$S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{8}{3}$ より $S'(t)=t^2-2t$ である。[1]と同様に $S'(a)=3$ とすると、

$$\begin{aligned} a^2-2a &= 3 \\ \Leftrightarrow a^2-2a-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(a-3) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $2 < a$ に注意すると、 $a=3$ である。

[1],[2]より、 $a=3$ である。 $S(3)=\frac{8}{3}$ だから、 $y=S(t)$ 上の点 $(3,S(3))$ での接線の方程式は

$$\begin{aligned} y-\frac{8}{3} &= 3(x-3) \\ \Leftrightarrow y &= 3x-\frac{19}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $b=-\frac{19}{3}$ である。

$$(答) \quad b=-\frac{19}{3}$$

(3)

$f(t)=S(t)-\left(3t-\frac{19}{3}\right)$ とおく。ここで、 $0 < t < 2$ 、 $2 \leq t$ のそれぞれの場合において $f(t) \geq 0$

となることを示す。

[1] $0 < t < 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(-\frac{1}{3}t^3+t^2\right)-\left(3t-\frac{19}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}t^3+t^2-3t+\frac{19}{3} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -t^2+2t-3 \\ &= -(t-1)^2-2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

であるから、 $0 < t < 2$ において $f(t)$ は単調に減少する。これと、 $f(t)$ が $t < 2$ において連続であること、 $f(2)=\frac{5}{3} > 0$ であることから、 $0 < t < 2$ において $f(t) \geq 0$ である。

[2] $2 \leq t$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{8}{3}\right)-\left(3t-\frac{19}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}t^3-t^2-3t+9 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^2-2t-3 \\ &= (t+1)(t-3) \end{aligned}$$

であるから、 $2 < t$ における $f(t)$ の増減は以下ようになる。

x	2	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{5}{3}$		0	

よって、 $2 \leq t$ において $f(t) \geq 0$ である。

[1],[2]より、 $t > 0$ の範囲において $f(t) \geq 0$ 、すなわち、 $S(t) \geq 3t-\frac{19}{3}$ となることが示された。

(証明終)

問題 3

(1)

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

である。この等式に $|2\vec{a}-\vec{b}|=6$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$ を代入して,

$$6^2=4\cdot 3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+(2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

を得る。

(答) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \\ &=-s|\vec{a}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

であり、この等式に $|\vec{a}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$ を代入すると,

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=-s\cdot 3^2+(s-t)\cdot 2+t\cdot (2\sqrt{2})^2=-7s+6t$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ のとき $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから、求める s と t の関係式は、

$$-7s+6t=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(答) $-7s+6t=0$

(3)

点 H が $\triangle OAB$ の垂心ならば、 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BH}$ である。

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}&=\vec{a}\cdot\{s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\} \\ &=s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

であり、この等式に $|\vec{a}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を代入すると,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=s\cdot 3^2+(t-1)\cdot 2=9s+2t-2$$

を得る。ここで、 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BH}$ のとき $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ であるから、

$$9s+2t-2=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②を s, t の連立方程式として解くと、 $s=\frac{3}{17}$, $t=\frac{7}{34}$ を得る。

(答) $s=\frac{3}{17}$, $t=\frac{7}{34}$