

1

(1)(A)

与式は,

$$\begin{aligned} |iz+2-2\sqrt{3}i| &= 4 \\ \Leftrightarrow |i||z-2i-2\sqrt{3}| &= 4 \\ \Leftrightarrow |z-(2\sqrt{3}+2i)| &= 4 \end{aligned}$$

と変形できるから、このとき点 z は中心を点 $2\sqrt{3}+2i$ 、半径の長さを4とする円を描く。(答) 中心を点 $2\sqrt{3}+2i$ とする半径4の円

(B)

与式を,

$$|z-0|=|z-(2\sqrt{3}+6i)|$$

とみると、点 z は原点と点 $2\sqrt{3}+6i$ からの距離が常に等しい図形を描く。したがって、点 z は原点と、点 $2\sqrt{3}+6i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

(答) 原点と点 $2\sqrt{3}+6i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2)

まず、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \sin^2 x + 3 \sin x + 1 \\ &= -\sin^2 x + 3 \sin x + 2 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $\sin x = t$ とおくと、 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ ゆえに $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$ をみたし、 $f(x)$ を t で表した式を $g(t)$ とすると、

$$g(t) = -t^2 + 3t + 2 = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

となる。 $f(x)$ と $g(t)$ の最大値および最小値は一致するから、 $g(t)$ の $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$ における最

大値と最小値を求めればよい。上式から、 $g(t)$ は $t=1$ のとき最大値4をとり、 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

最小値 $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ をとる。

(答) 最大値：4、最小値： $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

(3)

命題「 n を自然数とすると、 $(1+\sqrt[3]{2})^n$ が整数 a_n, b_n および c_n を用いて、 $a_n + b_n\sqrt[3]{2} + \frac{c_n}{\sqrt[3]{2}}$ と表される」を (A) とおく。数学的帰納法を用いて、(A) が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$(1+\sqrt[3]{2})^1 = 1 + \sqrt[3]{2}$$

であるから、 $a_1=1, b_1=1, c_1=0$ とすると (A) は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

(A) が成り立つ、すなわち、

$$(1+\sqrt[3]{2})^k = a_k + b_k\sqrt[3]{2} + \frac{c_k}{\sqrt[3]{2}}$$

の形に表せると仮定する。ここで、 $n=k+1$ のとき、仮定を利用して、

$$\begin{aligned} (1+\sqrt[3]{2})^{k+1} &= (1+\sqrt[3]{2})(1+\sqrt[3]{2})^k \\ &= (1+\sqrt[3]{2})\left(a_k + b_k\sqrt[3]{2} + \frac{c_k}{\sqrt[3]{2}}\right) \\ &= (a_k + c_k) + (a_k + b_k)\sqrt[3]{2} + \frac{(2b_k + c_k)}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

と表すことができる。このとき、 $a_{k+1}=a_k+c_k, b_{k+1}=a_k+b_k, c_{k+1}=2b_k+c_k$ とおくと、 $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ はすべて整数であり、

$$(1+\sqrt[3]{2})^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt[3]{2} + \frac{c_{k+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

と表せるから、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

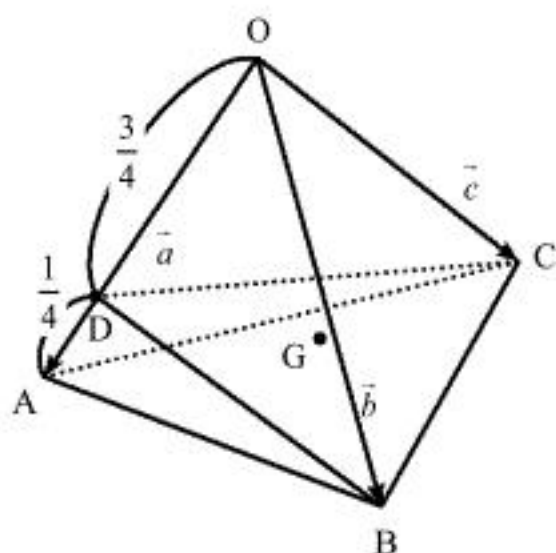
以上[1],[2]より、すべての自然数 n に対して (A) が成り立つことが示された。

(証明終)

2

(1)

以下に正四面体 $OABC$ と点 D および重心 G を示す。



まず, 立体 $OABC$ は各辺の長さが1の正四面体であるから,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

である。 $\triangle OAB$ は一辺の長さが1の正三角形であるから, $\angle AOB = 60^\circ$ である。よって, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

(2)

問題文よりベクトル $\overrightarrow{OD}$ は,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} = \frac{3}{4} \vec{a}$$

と表せるから, 重心の公式を用いるとベクトル $\overrightarrow{OG}$ は

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

(3)

まず, (2) の結果より, ベクトル $\overrightarrow{OG}$ は,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{11}{12} \left(\frac{3}{11} \vec{a} + \frac{4}{11} \vec{b} + \frac{4}{11} \vec{c} \right)$$

と表せる。ここで, $\frac{3}{11} \vec{a} + \frac{4}{11} \vec{b} + \frac{4}{11} \vec{c}$ の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の各係数の和は1であるから, この位置ベクトル

で表される点を X とすると, 点 X は $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{11} \vec{a} + \frac{4}{11} \vec{b} + \frac{4}{11} \vec{c}$ をみたし, 平面 ABC 上に存在する。

また, $\overrightarrow{OG}$ は $\overrightarrow{OX}$ の実数倍で表されるから, 3点 O, G, X は一直線上にある。したがって, 点 X は直線 OG と平面 ABC の交点であり, 点 E と一致するから,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3}{11} \vec{a} + \frac{4}{11} \vec{b} + \frac{4}{11} \vec{c}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OE} = \frac{3}{11} \vec{a} + \frac{4}{11} \vec{b} + \frac{4}{11} \vec{c}$$

(4)

(1) と同様に, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OG}|^2 &= \left| \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{9} |\vec{b}|^2 + \frac{1}{9} |\vec{c}|^2 + \frac{1}{6} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{9} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{6} \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{81}{144} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

である。したがって, $L = |\overrightarrow{OG}|$ であり, $|\overrightarrow{OG}| > 0$ であるから,

$$L = |\overrightarrow{OG}| = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad L = \frac{3}{4}$$

(5)

内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG}$ の値は,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG} &= \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{4} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} |\vec{b}|^2 + \frac{1}{3} \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

である。ここで, 三角形の面積の公式を用いると, 面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OG}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 \cdot \frac{9}{16} - \left(\frac{5}{8} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{64}} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{16} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad S = \frac{\sqrt{11}}{16}$$

3

(1)

まず, $f'(x), f''(x), f'''(x)$ をそれぞれ計算すると,

$$f'(x) = \cos x - 1 + 3ax^2$$

$$f''(x) = -\sin x + 6ax$$

$$f'''(x) = -\cos x + 6a$$

であるから,

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1 + 6a$$

となる。

$$(答) \quad f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = -1 + 6a$$

(2)

まず, $x \geq 0$ において常に $f''(x) \geq 0$ となるための必要条件を考える。 $x \geq 0$ において常に $f''(x) \geq 0$ となるためには, $f''(x)$ が $x=0$ で減少していない, すなわち $f'''(0) \geq 0$ である必要がある。したがって, 必要条件は,

$$f'''(0) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 6a \geq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{6}$$

である。一方, $a \geq \frac{1}{6}$ のとき $f''(x)$ は,

$$f''(x) = -\cos x + 6a$$

$$\geq -1 + 6a$$

$$\geq 0$$

となるから, $x \geq 0$ において $f''(x)$ は単調増加である。さらに, $f''(0) = 0$ であるから, $f''(x) \geq 0$ となる。したがって, 十分性が示せたから, 求める条件は $a \geq \frac{1}{6}$ である。

$$(答) \quad a \geq \frac{1}{6}$$

(3)

(2)の結果より, $a \geq \frac{1}{6}$ では $x \geq 0$ において $f''(x) \geq 0$ であるから, $f'(x)$ は単調増加である。

$f'(0) = 0$ であることに注意すると, $x \geq 0$ において $f'(x) \geq 0$ である。これより, $x \geq 0$ において $f(x)$ は単調増加であり, $f(0) = 0$ であるから $f(x) \geq 0$ である。したがって,

$$f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - x + ax^3 \geq 0$$

$$\therefore x - \sin x \leq ax^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。次に, $g(x) = x - \sin x$ とおき, $x \geq 0$ において $g(x) \geq 0$ を示す。 $g(x)$ の導関数は,

$$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

を満たすから, $g(x)$ は単調増加である。 $g(0) = 0$ であることと合わせると, $g(x) \geq 0$ を示すことができた。したがって, $x \geq 0$ で,

$$g(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x - \sin x \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①, ②より

$$0 \leq x - \sin x \leq ax^3 \quad (x \geq 0)$$

が示された。

(証明終)

4

- (1) $f'(x)$ が常に $f'(x) < 0$ であることを示す。 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = \frac{-(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2}$$

となる。ここで、 $e^x > 0$ かつ $(e^x + 1)^2 > 0$ であるから、常に $f'(x) < 0$ となる。したがって、 $f(x)$ は常に減少する。

(証明終)

(2)

部分分数分解を利用すると、不定積分 $\int \frac{1}{t(t+1)} dt$ は

$$\int \frac{1}{t(t+1)} dt = \int \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right\} dt = \log|t| - \log|t+1| + C$$

と求められる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \log|t| - \log|t+1| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

まず、 $I = \int_0^n f(x) dx$ とおく。さらに $e^x = t$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = e^x$ であり、

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \rightarrow & n \\ \hline t & 1 & \rightarrow & e^n \end{array}$$

であるから、

$$I = \int_0^n \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_1^{e^n} \frac{1}{(t+1)t} dt$$

となる。ここで、(2)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^n} \frac{1}{(t+1)t} dt \\ &= [\log|t| - \log|t+1|]_1^{e^n} \\ &= \log e^n - \log(e^n + 1) + \log 2 \\ &= n - \log(e^n + 1) + \log 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_0^n f(x) dx = n - \log(e^n + 1) + \log 2$$

また、

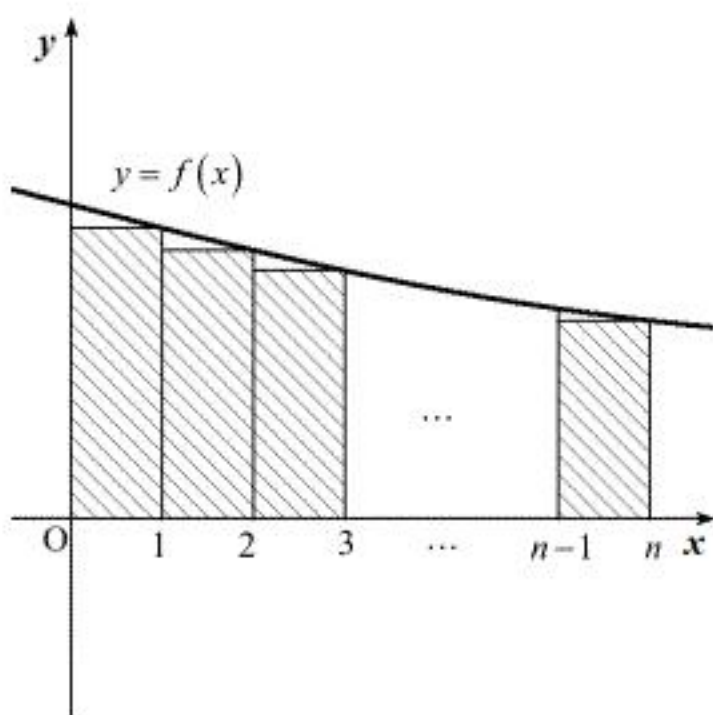
$$I = n - \log(e^n + 1) + \log 2 < n - \log e^n + \log 2 = \log 2$$

であるから、 $\int_0^n f(x) dx < \log 2$ は示せた。

(証明終)

(4)

$y = f(x)$ のグラフとその下の部分の長方形の面積を考える。以下に $y = f(x)$ のグラフと、横の長さが1で縦の長さが $f(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の n 個の長方形を斜線部で示す。



上図より、

$$(\text{長方形の面積の総和}) < \int_0^n f(x) dx$$

であることがわかるから、

$$\begin{aligned} 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + \dots + 1 \cdot f(n) &< \int_0^n f(x) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+1} + \frac{1}{e^3+1} + \dots + \frac{1}{e^n+1} &< \int_0^n f(x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、(3)の結果より、 $\int_0^n f(x) dx < \log 2$ であるから、

$$\frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+1} + \frac{1}{e^3+1} + \dots + \frac{1}{e^n+1} < \log 2$$

と示せた。

(証明終)