

数 学

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始の指示があったら、すぐに「問題」と「答案用紙」および「計算用紙」の種類と枚数が以下のとおりであることを確認し、受験番号を「答案用紙」の6枚すべてに記入してください。
 - 問題 1枚
 - 答案用紙 (数学その1) ～ (数学その6) 各1枚 計6枚
 - 計算用紙 (その1) ～ (その3) 各1枚 計3枚

(この「注意事項」は「計算用紙(その3)」のうら面に印刷されています。)
3. 「問題」1枚と「答案用紙」6枚および「計算用紙」3枚の種類や枚数が異なる場合や印刷が不鮮明な場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 解答は各答案用紙の指定された場所を書いてください。(数学その1) および(数学その2) では、おもて面に解答し、(数学その3) ～ (数学その6) では、うら面を使用する場合はその旨を記してください。
5. 「問題」1枚および「計算用紙」3枚は草案として使用してもかまいませんが、採点対象とはしません。必ず持ち帰ってください。
6. 試験終了後、「答案用紙」6枚はすべて回収します。上から(数学その1)、(数学その2)、…、(数学その6)の順に、おもて面を上にして、ひろげた状態で用紙の上下をそろえて6枚重ねてください。
7. すべての確認作業が終了するまで着席してください。

平成 29 年度入学者選抜試験問題（数学）

1 次の問題文の空欄 から にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) $a = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right)$, $b = \log_{10} \left(1 + \frac{2}{3}\right)$ とおく。 $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$ をそれぞれ a, b で表すと, $\log_{10} 2 =$, $\log_{10} 3 =$ となる。

(2) 正六面体の 8 個の頂点から異なる 3 点を無作為に選んだときに, その 3 点が正三角形をなす確率は であり, 直角二等辺三角形をなす確率は である。

(3) $\tan \theta = \sqrt{2}$ ($\pi < \theta < 2\pi$) のとき, $\tan \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = a + b\sqrt{2}$ (a, b は整数) と表すと, $\tan \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ であり, $\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = c + d\sqrt{2} + e\sqrt{3} + f\sqrt{6}$ (c, d, e, f は整数) と表すと, $\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}\right) =$ となる。

2 次の問題文の空欄 から にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) 辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の長さを 1 とし, $\angle ABC$ の二等分線が辺 AC と交わる点を D とする。線分 BD の長さのとりうる範囲は, $< BD <$ である。

(2) 次の等式が成り立つような a, b の値を求めると, $a =$, $b =$ である。

$${}_{2017}C_1 + {}_{2017}C_3 + \cdots + {}_{2017}C_{2k-1} + \cdots + {}_{2017}C_{2015} + {}_{2017}C_{2017} = 2^a$$

$${}_{2017}C_1 - {}_{2017}C_3 + \cdots + (-1)^{k+1} {}_{2017}C_{2k-1} + \cdots - {}_{2017}C_{2015} + {}_{2017}C_{2017} = 2^b$$

3 表が赤で裏が紫のカードと表が白で裏が紫のカードがそれぞれ n 枚ずつあり, 紫の面を上にしてカードの表が特定できない状態でテーブルの上に散らばっている。ただし, $n \geq 4$ である。この $2n$ 枚から元に戻すことなく 1 枚ずつ無作為に取り出し表の色を見て, 赤白どちらかの n 枚をすべて取り出すまで繰り返す。これを終えた時点で, テーブルに残った他の色のカードが 4 枚以下である確率を p_n とすると, $p_n = \frac{5n(3n-5)}{4(2n-1)(2n-3)}$ であることを示せ。また, $p_n > p_{n+1} > \frac{15}{16}$ ($n = 4, 5, 6, \dots$) が成り立つことを示せ。

4 空間において, 原点 O と点 A(0, 1, 2) を通る直線を z 軸の周りに 1 回転させてできる面を円錐面 S と呼ぶ。点 B $\left(0, \frac{3}{10}, -\frac{2}{5}\right)$ を通りベクトル $\vec{e} = (1, 0, 0)$ に平行な直線を l とする。 l と点 F $\left(0, \frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ を含む平面を α とし, α 上の点 P が円錐面 S 上にあるとする。P から l に垂線を下ろし, l との交点を Q とするとき, $PF = PQ$ であることを示せ。

5 正の整数 n に対して, 区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で連続な関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & (x = 0) \\ \frac{\cos x \sin 2nx}{\sin x} & \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

と定義し, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$ と定める。このとき, a_n を n の式で表せ。また, I_1, I_2 さらに I_n の値を求めよ。

6 素数 p, q に対して, $\sqrt{p}$ および $\sqrt{p} + \sqrt[3]{q}$ が無理数であることを示せ。