

問題 1

(1)

問題文より，整式 $Q_1(x), Q_2(x)$ を用いて

$$P(x) = (x+1)(x-3)Q_1(x) + 3x+4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$P(x) = (x-1)(x-3)Q_2(x) + 5x-2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

とできる。また， $(x-1)(x+1)$ で割ったときの余りを $ax+b$ (a, b は整数) とすると，整式 $Q_3(x)$ を用いて

$$P(x) = (x-1)(x+1)Q_3(x) + ax+b \quad \cdots \textcircled{3}$$

とできる。①より $P(-1)=1$ ，②より $P(1)=3$ であり， $x=-1, 1$ をそれぞれ③に代入すると

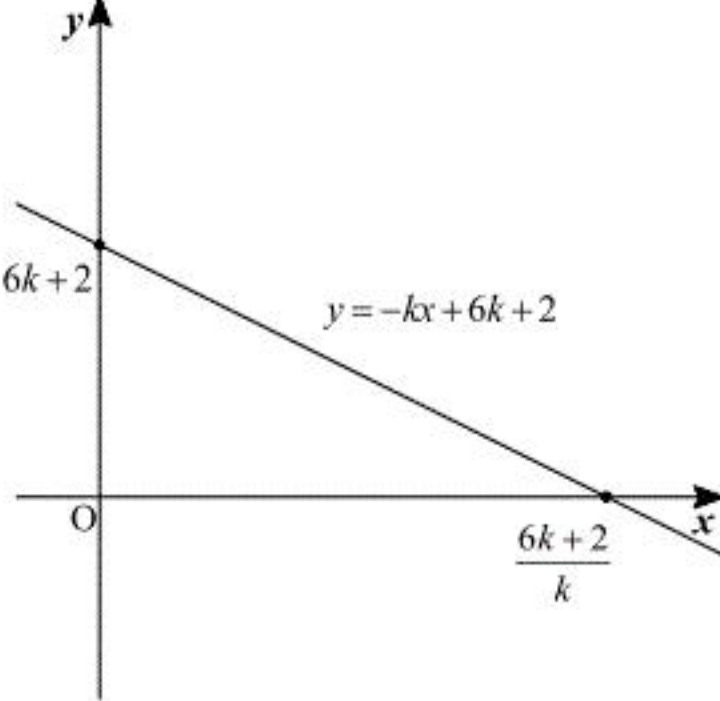
$$P(-1) = -a+b=1, \quad P(1) = a+b=3 \text{ であるから}$$

$$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

となる。よって余りは $x+2$ である。

(答) $x+2$

(2)



直線 l は点 $(6, 2)$ を通る傾き $-k$ の直線であるから，その方程式は

$$y = -k(x-6) + 2 \Leftrightarrow y = -kx + 6k + 2$$

となる。この直線と x 軸， y 軸との交点はそれぞれ方程式に $y=0, x=0$ を代入することにより， $\left(\frac{6k+2}{k}, 0\right), (0, 6k+2)$ となる。したがって，この点がそれぞれ点 B ，点 C となるから， $\triangle OBC$ の面積は

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{2} \cdot (6k+2) \cdot \frac{6k+2}{k} \\ &= \frac{2(3k+1)^2}{k} \\ &= 2\left(9k + \frac{1}{k} + 6\right) \end{aligned}$$

となる。ここで相加相乗平均の関係から，

$$\begin{aligned} S(k) &= 2\left(9k + \frac{1}{k} + 6\right) \\ &\geq 2\left(2\sqrt{9k \cdot \frac{1}{k}} + 6\right) \\ &= 2(2\sqrt{9} + 6) \\ &= 24 \end{aligned}$$

であり，等号成立は $9k = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} (\because k > 0)$ のときである。以上より， $S(k)$ は $k = \frac{1}{3}$ のとき最小値 24 をとる。

(答) $S(k)$ の最小値: 24 ， k の値: $\frac{1}{3}$

(3)

点 P を (x, y) とすると，

$$\begin{aligned} PA &= \sqrt{\{x - (-a)\}^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \\ PB &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \end{aligned}$$

とできる。ここで $PA:PB=3:1$ であるから，

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} : \sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= 3:1 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \end{aligned}$$

となる。両辺は 0 以上であるから，

$$\begin{aligned} 3\sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow 9\{(x-a)^2 + y^2\} &= (x+a)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 20ax + 8a^2 + 8y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}ax + a^2 + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}a\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{3}{4}a\right)^2 \end{aligned}$$

となる。よって点 P の軌跡は， $\left(\frac{5}{4}a, 0\right)$ を中心とした半径 $\frac{3}{4}a$ の円である。

(答) $\left(\frac{5}{4}a, 0\right)$ を中心とした半径 $\frac{3}{4}a$ の円

(4)

箱の中から 1 個だけ玉を取り出す場合に赤色の玉を取り出す確率が $\frac{1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b+c} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2a &= a+b+c \\ \Leftrightarrow a &= b+c \end{aligned}$$

となる。次に， 2 個の玉を同時に取り出す場合に赤色と緑色の玉が 1 個ずつ出る確率が $\frac{4}{25}$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot b}{a+b+c \cdot C_2} &= \frac{4}{25} \\ \Leftrightarrow \frac{a \cdot b}{\frac{1}{2}(a+b+c)(a+b+c-1)} &= \frac{4}{25} \\ \Leftrightarrow \frac{a \cdot b}{\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (2a-1)} &= \frac{4}{25} (\because a=b+c) \\ \Leftrightarrow 25b &= 4(2a-1) \\ \Leftrightarrow b &= \frac{4(2a-1)}{25} \end{aligned}$$

である。これと $a=b+c$ より，

$$\begin{aligned} c &= a-b \\ &= a - \frac{4(2a-1)}{25} \\ &= \frac{17a+4}{25} \end{aligned}$$

とできる。最後に， 3 個の玉を同時に取り出す場合すべて互いに異なる色を取り出される場合の確率が $\frac{9}{50}$ であることより，

$$\begin{aligned} \frac{abc}{a+b+c \cdot C_3} &= \frac{9}{50} \\ \Leftrightarrow \frac{abc}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)} &= \frac{9}{50} \\ \Leftrightarrow \frac{a \cdot \frac{4(2a-1)}{25} \cdot \frac{17a+4}{25}}{\frac{1}{6} \cdot 2a(2a-1)(2a-2)} &= \frac{9}{50} \\ \Leftrightarrow 68a+16 &= 75a-75 \\ \Leftrightarrow 7a &= 91 \\ \Leftrightarrow a &= 13 \end{aligned}$$

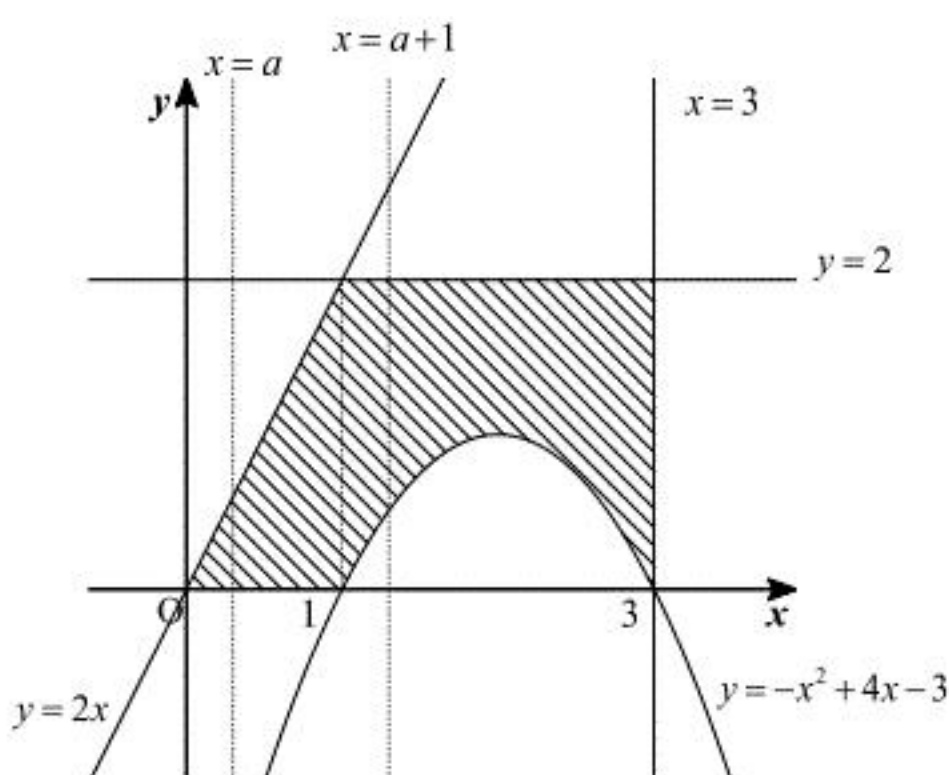
とわかる。 $b = \frac{4(2a-1)}{25}, c = \frac{17a+4}{25}$ に $a=13$ を代入して， $b=4, c=9$ も得られる。

(答) $a=13, b=4, c=9$

問題 2

(1)

領域 D を図示すると以下の斜線部のようになる。ただし、境界を含む。



したがって、図より $0 \leq a \leq 1$ のとき、 $a \leq x \leq 1$ の区間の面積は、

$$\begin{aligned} \int_a^1 2x \, dx &= \left[x^2 \right]_a^1 \\ &= 1^2 - a^2 \\ &= 1 - a^2 \end{aligned}$$

となり、 $1 \leq x \leq a+1$ の区間の面積は、

$$\begin{aligned} &\int_1^{a+1} \left\{ 2 - (-x^2 + 4x - 3) \right\} dx \\ &= \int_1^{a+1} (x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_1^{a+1} \\ &= \frac{1}{3}(a+1)^3 - 2(a+1)^2 + 5(a+1) - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3}a^3 - a^2 + 2a \end{aligned}$$

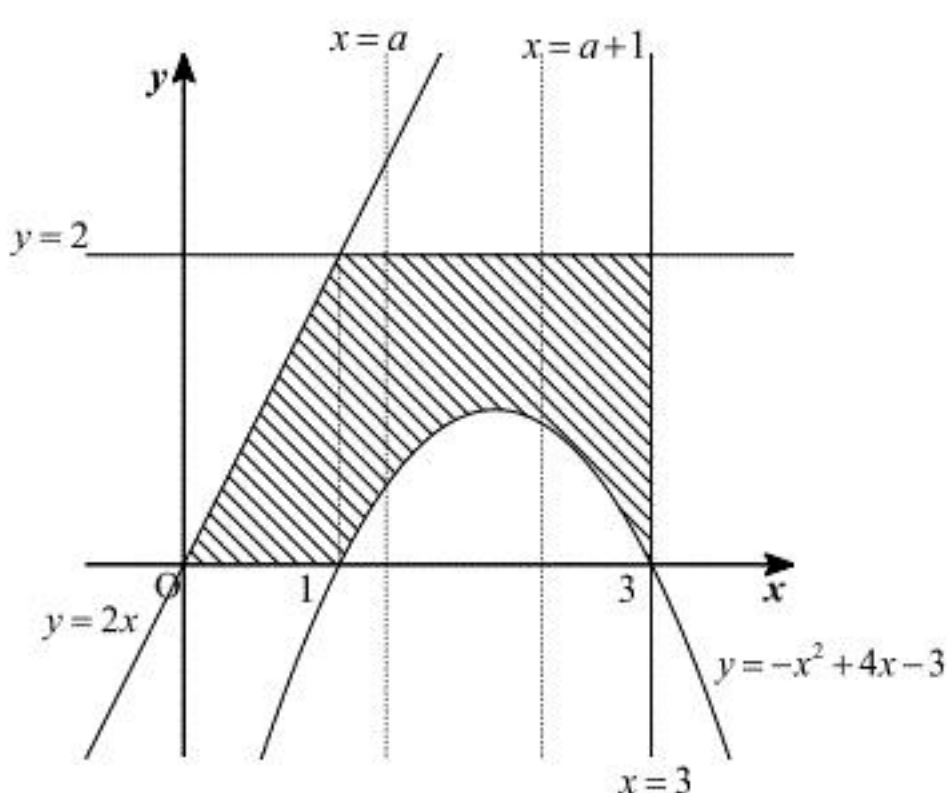
となる。したがって $S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= 1 - a^2 + \frac{1}{3}a^3 - a^2 + 2a \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a + 1$$

(2)



図より、 $1 < a \leq 2$ の区間での $a \leq x \leq a+1$ の領域 D の面積は、

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+1} \left\{ 2 - (-x^2 + 4x - 3) \right\} dx \\ &= \int_a^{a+1} (x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{1}{3}(a+1)^3 - 2(a+1)^2 + 5(a+1) - \frac{1}{3}a^3 + 2a^2 - 5a \\ &= a^2 - 3a + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって $S(a) = a^2 - 3a + \frac{10}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad S(a) = a^2 - 3a + \frac{10}{3}$$

(3)

$0 \leq a \leq 1$ のとき、 $S'(a) = a^2 - 4a + 2$ となり、 $S'(a) = 0$ とすると $a = 2 \pm \sqrt{2}$ となる。ここで、

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a + 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}a - \frac{2}{3} \right) (a^2 - 4a + 2) - \frac{4}{3}a + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

と $S'(2 - \sqrt{2}) = 0$ より、

$$\begin{aligned} S(2 - \sqrt{2}) &= -\frac{4}{3}(2 - \sqrt{2}) + \frac{7}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 1}{3} \end{aligned}$$

となる。また、 $1 < a \leq 2$ のとき、 $S(a) = \left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{13}{12}$ であるから、増減表は次のようになる。

a	0	...	$2 - \sqrt{2}$	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	0	+	
$S(a)$	1		$\frac{4\sqrt{2}-1}{3}$		$\frac{13}{12}$		$\frac{4}{3}$

ここで、

$$32 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{32} > \sqrt{25} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 5 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 1 > 4 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{2} - 1}{3} > \frac{4}{3}$$

と、 $\frac{13}{12} > 1$ より、最大値は $\frac{4\sqrt{2} - 1}{3}$ で、最小値は 1 とわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{4\sqrt{2} - 1}{3}, \text{ 最小値: } 1$$

問題 3

(1)

数学的帰納法を利用して、 $2 \leq a_n < 3$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき、

$a_1 = 2$ より $2 \leq a_1 < 3$ が成立する。よって題意は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、

$2 \leq a_k < 3$ が成り立つと仮定すると、

$$4 - \frac{3}{2} \leq 4 - \frac{3}{a_k} < 4 - \frac{3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq a_{k+1} < 3$$

となり、 $2 \leq a_{k+1} < 3$ が成立するから、 $n=k+1$ のときも題意は成り立つ。

したがって[1],[2]より題意は示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、 $0 < a_n < a_{n+1}$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4 - \frac{3}{a_1} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

であるから、 $0 < a_1 < a_2$ となり、題意は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、

$0 < a_k < a_{k+1}$ が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= 4 - \frac{3}{a_{k+1}} - \left(4 - \frac{3}{a_k} \right) \\ &= \frac{3}{a_k} - \frac{3}{a_{k+1}} \\ &= \frac{3(a_{k+1} - a_k)}{a_k a_{k+1}} \\ &> 0 \quad (\because a_{k+1} > a_k > 0) \end{aligned}$$

より、 $n=k+1$ のときも題意は成り立つ。

したがって[1],[2]より題意は示された。

(証明終)

(3)

数学的帰納法を利用して、 $3 - a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$3 - a_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\frac{1}{2^{1-1}} = 1$$

より、 $3 - a_1 \leq 1$ となることから、題意は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、

$3 - a_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} &3 - a_{k+1} \\ &= 3 - \left(4 - \frac{3}{a_k} \right) \\ &= -1 + \frac{3}{a_k} \\ &= \frac{3 - a_k}{a_k} \\ &\leq \frac{1}{2} (3 - a_k) \quad (\because 2 \leq a_k < 3) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

より、 $n=k+1$ のときも題意は成り立つ。

したがって[1],[2]より題意は示された。

(証明終)