

1

(1)

$$f(x) = x^{12}e^{-x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^{11}e^{-x} - x^{12}e^{-x} \\ &= x^{11}e^{-x}(12-x) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の $x \geq 0$ における増減表は下のようになる。

x	0	...	12	...
$f'(x)$	$\swarrow$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$12^{12}e^{-12}$	$\searrow$

これより最大値は $12^{12}e^{-12}$ である。つぎに、この整数部分の桁数を求める。

$$\begin{aligned} \log_{10}(12^{12}e^{-12}) &= 12\log_{10}12 - 12\log_{10}e \\ &= 12 \times 1.08 - 12 \times 0.43 \\ &= 7.8 \end{aligned}$$

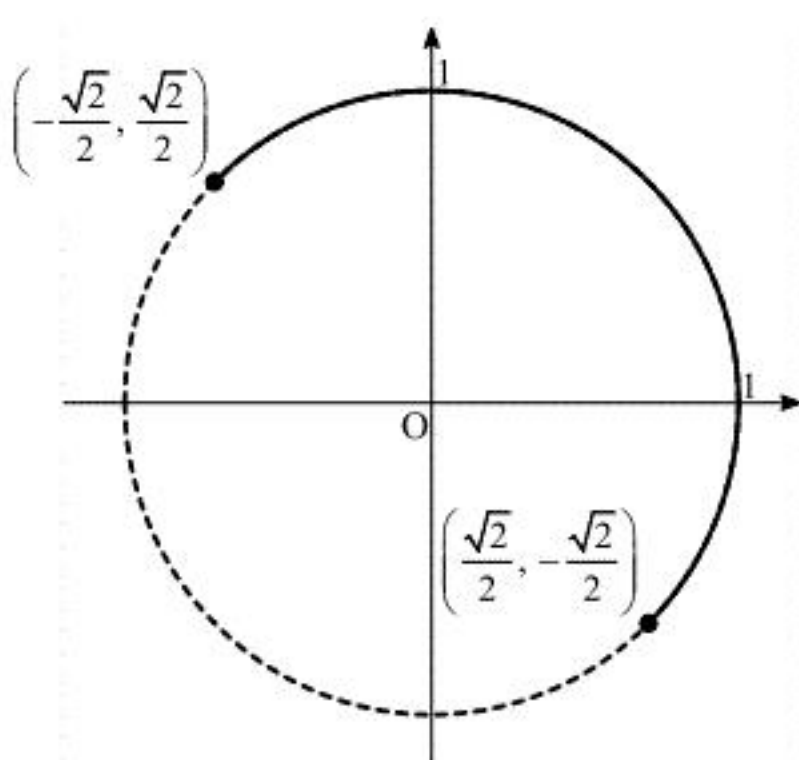
より、 $10^7 < 12^{12}e^{-12} < 10^8$ であるから、整数部分の桁数は8桁である。

(答) 8桁

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos^2 \frac{x}{2} + \sin x + 3 \\ &= 2 \cdot \frac{1+\cos x}{2} + \sin x + 3 \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 4 \end{aligned}$$

である。ここで、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ である。



前図より $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ は $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとり、 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値1をと

る。したがって $f(x)$ は、 $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ つまり $x = -\frac{\pi}{2}$ のとき最小値

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \sqrt{2} \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 4 \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

をとり、 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ つまり $x = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + 4 \\ &= \sqrt{2} \cdot 1 + 4 \\ &= 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

をとる。

(答) $x = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $4 + \sqrt{2}$

$x = -\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 3

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 3k^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 3\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + 3x^2} dx \end{aligned}$$

である。ここで $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、また x と θ の対応は

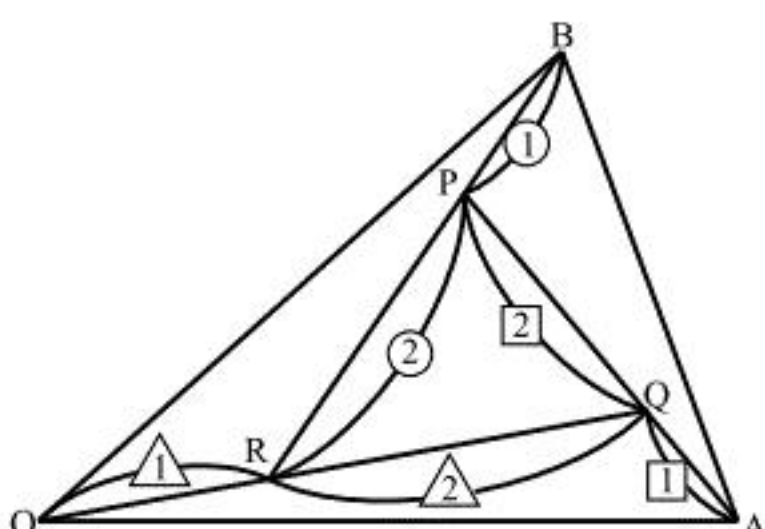
x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

となるから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + 3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$



(1)

点 Q は線分 AP を 1:2 に内分する点だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$$

(2)

点 P は線分 BR を 1:2 に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right) \\ &= \frac{2}{27}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{27}\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

となるから、 $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すと、

$$\begin{aligned}\frac{26}{27}\overrightarrow{OP} &= \frac{2}{27}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \\ \therefore \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{13}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{13}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{13}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{13}\overrightarrow{OB}$$

(3)

直線 OP と直線 AB の交点を S とする。S は直線 OP 上の点であるから、(2)より実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= t\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{1}{13}t\overrightarrow{OA} + \frac{9}{13}t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

と表せる。また、S は直線 AB 上にあるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{13}t + \frac{9}{13}t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{13}{10}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{10}\overrightarrow{OB}$ と表せるから AS:SB=9:1 であり

$$\triangle OAS = \frac{9}{10} \triangle OAB$$

となる。一方、 $\overrightarrow{OP} = \frac{10}{13}\overrightarrow{OS}$ より

$$\triangle OAP = \frac{10}{13} \triangle OAS$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\triangle OAP &= \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{10} \triangle OAB \\ &= \frac{9}{13} \triangle OAB\end{aligned}$$

となり、求める面積比は $\triangle OAB:\triangle OAP=13:9$ である。

$$(\text{答}) \quad \triangle OAB:\triangle OAP=13:9$$

(4)

(2)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(\frac{1}{13}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{13}\overrightarrow{OB}\right) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= -\frac{1}{13}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{9}{13}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{8}{13}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直であるから $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ となり、 $|\overrightarrow{OA}| = 5$ 、 $|\overrightarrow{OB}| = 3$ であることと合わせて

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{13} \cdot 5^2 + \frac{9}{13} \cdot 3^2 - \frac{8}{13}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \Leftrightarrow \frac{8}{13}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \frac{56}{13} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 7\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 7 - \frac{2}{3} \cdot 5^2 \\ &= -12\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$$

3

(1)

$y^2 = 4x$ の両辺を x で微分すると $2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4$ となり、 $y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

である。したがって、 $p \neq 0$ のとき求める接線の方程式は

$$y = \frac{2}{p} \left(x - \frac{p^2}{4} \right) + p$$

$$\therefore y = \frac{2}{p} x + \frac{p}{2}$$

である。

$$(答) \quad y = \frac{2}{p} x + \frac{p}{2}$$

(2)

まず、点 A から C に引いた接線は 2 本存在することを証明する。 $p = 0$ のとき点 P は原点であり、この点における C の接線は $x = 0$ である。この接線は $(-1, a)$ を通らない。C 上の点

$\left(\frac{p^2}{4}, p \right) (p \neq 0)$ における接線の方程式は(1)より $y = \frac{2}{p} x + \frac{p}{2}$ であるから、この接線が

$(x, y) = (-1, a)$ を通るとき、

$$a = -\frac{2}{p} + \frac{p}{2}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2ap - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①を p に関する 2 次方程式とみて、判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = a^2 + 4 > 0$$

である。したがって、この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解を持つ。また、①は $p = 0$ を解に持たない。したがって点 A から C に引いた接線は 2 本存在する。

次に、それら 2 本の接線は直交することを証明する。2 本の接線の接点の y 座標を p_1, p_2 とするとこれらは 2 次方程式 $p^2 - 2ap - 4 = 0$ の解である。したがって解と係数の関係より、

$$p_1 p_2 = -4$$

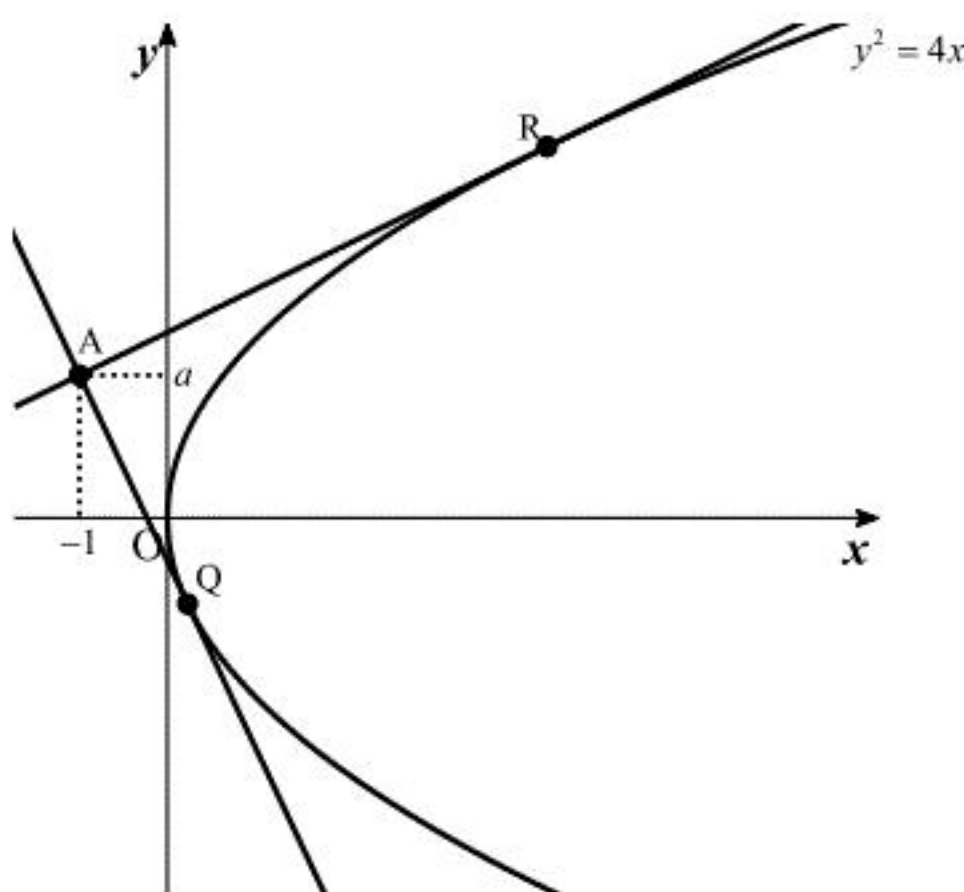
である。接線の傾きはそれぞれ $\frac{2}{p_1}, \frac{2}{p_2}$ であるから、これらの積は

$$\frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} = -1$$

となり、2 本の接線は直交する。

(証明終)

(3)



C の方程式は $y^2 = 4x$ であるから焦点 F の座標は $(1, 0)$ である。接点 Q, R の y 座標を p_1, p_2 とすると x 座標は $\frac{p_1^2}{4}, \frac{p_2^2}{4}$ である。

[1] $\frac{p_1^2}{4} = \frac{p_2^2}{4}$ のとき

直線 QR の方程式は

$$x = \frac{p_1^2}{4}$$

である。また、 $\frac{p_1^2}{4} = \frac{p_2^2}{4}$ かつ $p_1 \neq p_2$ より、 $p_1 = -p_2$ である。よって直線 QR の方程式は

(2)も合わせると、

$$x = \frac{-p_1 p_2}{4} = 1$$

である。したがって、直線 QR は焦点 F を通る。

[2] $\frac{p_1^2}{4} \neq \frac{p_2^2}{4}$ のとき

直線 QR の方程式は

$$y = \frac{p_2 - p_1}{\frac{p_2^2}{4} - \frac{p_1^2}{4}} \left(x - \frac{p_1^2}{4} \right) + p_1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{p_2 + p_1} \left(x - \frac{p_1^2}{4} \right) + p_1$$

となるから、 $y = 0$ を代入すると

$$x = \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_1(p_2 + p_1)}{4}$$

$$= -\frac{p_1 p_2}{4}$$

$$= 1$$

となる。したがって、直線 QR は焦点 F を通る。

以上, [1], [2]より直線 QR は焦点 F $(1, 0)$ を通る。

(証明終)

4

(1)

まず、 x が t について、つねに増加することを証明する。 x を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$$

であるから、 x は t についてつねに増加する。

次に、 x がすべての実数を値にとることを証明する。 $x = t - \frac{1}{t}$ は $t > 0$ において連続な増加関数

であり、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \left(t - \frac{1}{t} \right) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \infty$$

であることから、 x はすべての実数を値にとる。

(証明終)

(2)

y を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 1 - \frac{1}{t^2} \\ &= \frac{t^2 - 1}{t^2} \\ &= \frac{(t-1)(t+1)}{t^2} \end{aligned}$$

となるから、 y の $t > 0$ での増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	1	...	(∞)
$\frac{dy}{dt}$		-	0	+	
y	∞	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

これより、 y のとり得る値は $y \geq 2$ である。

(答) $y \geq 2$

(3)

$$y + x = 2t$$

$$y - x = \frac{2}{t}$$

であるから、辺々かけ合わせると

$$(y+x)(y-x) = 2t \cdot \frac{2}{t}$$

$$\therefore y^2 - x^2 = 4$$

となる。

(答) $y^2 - x^2 = 4$

(4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

であるから、 $t = 2$ のとき点 P における接線の傾きは $\frac{3}{5}$ である。したがって、点 P $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)$ にお

ける接線 l の方程式は、

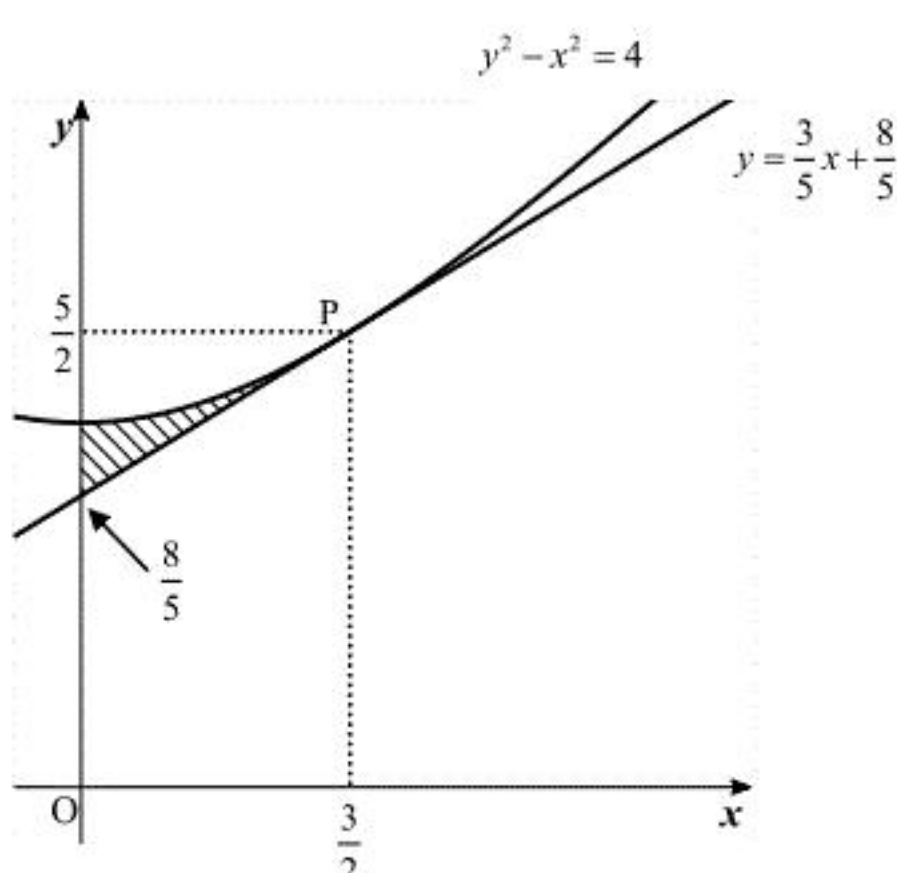
$$y = \frac{3}{5} \left(x - \frac{3}{2} \right) + \frac{5}{2}$$

$$\therefore y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$$

となる。

(答) $y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$

(5)



直線 $y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$ 、直線 $x = \frac{3}{2}$ 、 x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{5} + \frac{5}{2} \right) \times \frac{3}{2} = \frac{123}{40}$$

である。一方、曲線 $y^2 - x^2 = 4$ 、直線 $x = \frac{3}{2}$ 、 x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{\frac{3}{2}} y dx$$

である。ここで、 $x = 0$ のとき

$$t - \frac{1}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \pm 1$$

であり、 $t > 0$ より $t = 1$ である。また、 $x = \frac{3}{2}$ のとき(4)より $t = 2$ である。これらより、 x と t の

対応は

x	0	$\rightarrow$	$\frac{3}{2}$
t	1	$\rightarrow$	2

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} y dx &= \int_1^2 y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^2 \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 + 2 \log t - \frac{1}{2t^2} \right]_1^2 \\ &= \frac{15}{8} + 2 \log 2 \end{aligned}$$

となる。図より、求める面積は前述の 2 つの面積の差をとって

$$\begin{aligned} S &= \frac{15}{8} + 2 \log 2 - \frac{123}{40} \\ &= 2 \log 2 - \frac{6}{5} \end{aligned}$$

である。

(答) $2 \log 2 - \frac{6}{5}$