

1

【解答】

- (1)

ア	-2
---	------

イ	-2π
---	---------
- (2)

ウ	e^7
---	-------
- (3)

エ	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$
---	------------------------
- (4)

オ	$x^2 - \frac{1}{3}$
---	---------------------
- | | |
|---|----------------------|
| カ | $x^3 - \frac{3}{5}x$ |
|---|----------------------|
- (5)

キ	$\left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$
---	--
- | | |
|---|-------------------------|
| ク | $\frac{54\sqrt{5}}{49}$ |
|---|-------------------------|

【解説】

(1)

部分積分法より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \cos x dx &= \int_0^{\pi} (x \sin x)' dx - \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= [x \sin x + \cos x]_0^{\pi} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx &= \int_0^{\pi} (x^2 \sin x)' dx - 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi} (x^2 \sin x)' dx - 2 \left\{ \int_0^{\pi} \cos x dx - \int_0^{\pi} (x \cos x)' dx \right\} \\ &= [x^2 \sin x]_0^{\pi} - 2 [\sin x - x \cos x]_0^{\pi} \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

である。

(2)

$x \rightarrow 0$ のとき $3x \rightarrow 0$, $-4x \rightarrow 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+3x}{1-4x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{x}}}{(1-4x)^{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left\{ (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right\}^3}{\left\{ (1-4x)^{\frac{1}{4x}} \right\}^{-4}} \\ &= \frac{e^3}{e^{-4}} \\ &= e^7\end{aligned}$$

となる。

(3)

$k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt$ とおくと、 $f(x) = \sin x + k$ と表すことができる。よって、

$$\begin{aligned}k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + k) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t + k \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2} + k \cos t \right) dt \\ &= \left[-\frac{\cos 2t}{4} + k \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

が成立する。以上より、

$$k = \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

となる。

(4)

$$(1-x^2)P_k''(x) - 2xP_k'(x) + k(k+1)P_k(x) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおく。題意より、 $P_2(x) = x^2 + ax + b$ とおけるから、 $P_2'(x) = 2x + a$, $P_2''(x) = 2$ である。よっ

て $k=2$ を①に代入して、

$$\begin{aligned}(1-x^2)P_2''(x) - 2xP_2'(x) + 2 \cdot 3P_2(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-x^2) \cdot 2 - 2x(2x+a) + 6(x^2+ax+b) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4ax + 2 + 6b &= 0\end{aligned}$$

となる。これが x についての恒等式となるから、

$$\begin{cases} 4a = 0 \\ 2 + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

とわかる。以上より、 $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ となる。同様にして題意より、 $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx + e$ と

おけるから、 $P_3'(x) = 3x^2 + 2cx + d$, $P_3''(x) = 6x + 2c$ である。 $k=3$ を①に代入して、

$$\begin{aligned}(1-x^2)P_3''(x) - 2xP_3'(x) + 3 \cdot 4P_3(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-x^2)(6x+2c) - 2x(3x^2+2cx+d) + 12(x^3+cx^2+dx+e) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6cx^2 + (6+10d)x + 2c + 12e &= 0\end{aligned}$$

となる。これが x についての恒等式であるから、

$$\begin{cases} 6c = 0 \\ 6+10d = 0 \\ 2c+12e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = -\frac{3}{5} \\ e = 0 \end{cases}$$

とわかる。以上より、 $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$ となる。

(5)

A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) を通る平面 α の方程式は、

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z = 6$$

である。よって平面 α の法線ベクトルの1つは、

$$\vec{n} = (6, 3, 2)$$

である。したがって、原点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H とするとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= k\vec{n} \\ &= (6k, 3k, 2k)\end{aligned}$$

と表すことができる。さらに、点 H は平面 α 上の点であるから、

$$\begin{aligned}6 \cdot 6k + 3 \cdot 3k + 2 \cdot 2k &= 6 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{6}{49}\end{aligned}$$

となる。点 H は線分 OD の中点であるから、求める点 D は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{OH} \\ &= 2k\vec{n} \\ &= \frac{12}{49} \cdot (6, 3, 2) \\ &= \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)\end{aligned}$$

である。よって、点 D $\left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$ であり、このとき、

$$|\overrightarrow{OC}| = 3, |\overrightarrow{OH}| = \frac{6}{49} \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{6}{7}$$

であるので、 $\triangle OCH$ について、 $\angle OHC = 90^\circ$ であるから、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CH}| &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{6}{7} \right)^2} \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{7}\end{aligned}$$

である。よって $\triangle OCH$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot OH \cdot CH &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9\sqrt{5}}{7} \\ &= \frac{27\sqrt{5}}{49}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $\triangle OCD$ の面積は、

$$2 \cdot \frac{27\sqrt{5}}{49} = \frac{54\sqrt{5}}{49}$$

である。

2

〔解答〕

$$(1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ケ} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{コ} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{サ} & 2\sqrt{3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{シ} & \pi \\ \hline \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ス} & -\frac{1}{124} \\ \hline \end{array}$$

〔解説〕

(1)

実数 x, y が $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たすとき,

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

であるから, $0 \leq \theta < 2\pi$ として,

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sin \theta \end{cases}$$

とおくことができる。これを解くと,

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin \theta + \cos \theta \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \theta \end{cases}$$

となる。これらを $x^2 + 2xy$ にそれぞれ代入すると,

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin \theta + \cos \theta\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin \theta + \cos \theta\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta + \cos 2\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで, $0 \leq \theta < 2\pi$ より, $\frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$ である。したがって,

$$-1 \leq \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

である。ゆえに, 求める最大値は $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 最小値は $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ となる。

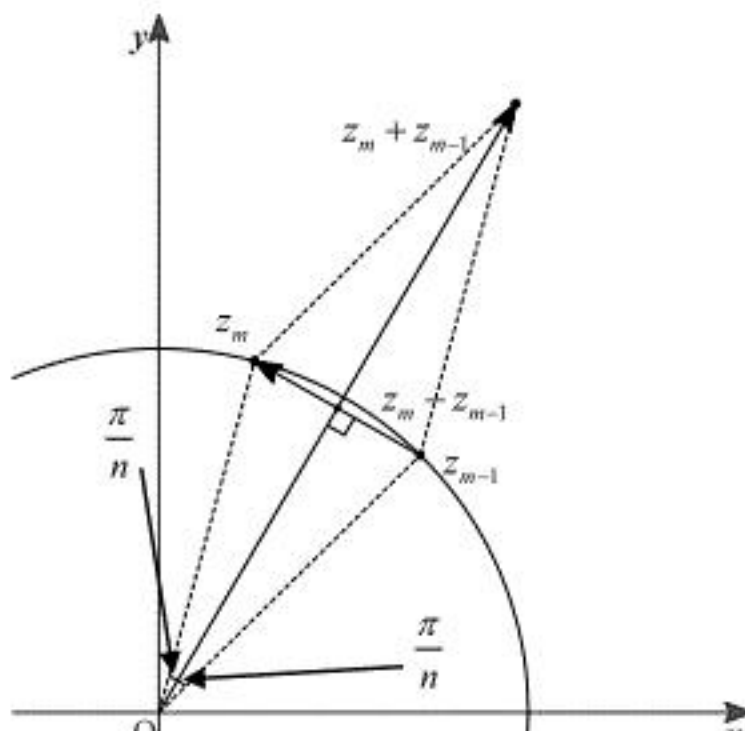
(2)

1 の n 乗根は,

$$z_m = \cos \frac{2m}{n}\pi + i \sin \frac{2m}{n}\pi$$

と表すことができる。ただし $m = 0, 1, \dots, n-1$ である。ここで, $z_n = z_0$ とおく。 $m = 1, 2, \dots, n$

のとき, $z_m - z_{m-1}$ と $z_m + z_{m-1}$ をそれぞれ図示すると, 下のようになる。



上図の破線で示した四角形はひし形であるから,

$$\arg \frac{z_m - z_{m-1}}{z_m + z_{m-1}} = \frac{\pi}{2}$$

$$|z_m - z_{m-1}| = \tan \frac{\pi}{n} \cdot |z_m + z_{m-1}|$$

である。ゆえに, $z_m - z_{m-1}$ は $z_m + z_{m-1}$ を長さ $\tan \frac{\pi}{n}$ 倍し, 反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものであ

るから, $z_n = z_0$ に注意して,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{z_0 - z_{n-1}}{z_0 + z_{n-1}} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m - z_{m-1}}{z_m + z_{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{z_m - z_{m-1}}{z_m + z_{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ \tan \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= n \cdot i \tan \frac{\pi}{n} \\ &= i \cdot n \tan \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

となる。よって, S_n の虚部 I_n は,

$$I_n = n \tan \frac{\pi}{n}$$

である。ゆえに, $I_6 = 6 \tan \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$ である。さらに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi$$

となる。

(3)

$x_k = 5^{3^k}$ とおくと,

$$\begin{aligned} x_k^3 &= \left(5^{3^k}\right)^3 \\ &= 5^{3^{k+1}} \\ &= 5^{3^{k+1}} \\ &= x_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_k^2 &= \left(5^{3^k}\right)^2 \\ &= \left(5^2\right)^{3^k} \\ &= 25^{3^k} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} 1 + 5^{3^k} + 25^{3^k} &= 1 + x_k + x_k^2 \\ &= \frac{1 - x_k^3}{1 - x_k} \quad (\because x_k > 1) \\ &= \frac{1 - x_{k+1}}{1 - x_k} \end{aligned}$$

と表せる。よって,

$$\begin{aligned} \left(1 + 5^{3^1} + 25^{3^1}\right) \left(1 + 5^{3^2} + 25^{3^2}\right) \cdots \left(1 + 5^{3^{99}} + 25^{3^{99}}\right) &= \frac{1 - x_2}{1 - x_1} \cdot \frac{1 - x_3}{1 - x_2} \cdot \frac{1 - x_4}{1 - x_3} \cdots \frac{1 - x_{99}}{1 - x_{98}} \cdot \frac{1 - x_{100}}{1 - x_{99}} \\ &= \frac{1 - x_{100}}{1 - x_1} \\ &= \frac{1 - 5^{3^{100}}}{1 - 5^{3^1}} \\ &= \left(1 - 5^{3^{100}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{124}\right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \left(1 + 5^{3^1} + 25^{3^1}\right) \left(1 + 5^{3^2} + 25^{3^2}\right) \cdots \left(1 + 5^{3^{99}} + 25^{3^{99}}\right) \cdot \frac{1}{1 - 5^{3^{100}}} &= \frac{1 - 5^{3^{100}}}{1 - 5^{3^{100}}} \cdot \left(-\frac{1}{124}\right) \\ &= -\frac{1}{124} \end{aligned}$$

である。

Aの結果とその得点は以下の表の通りである。

サイコロで出た数	コインの表裏の組み合わせと得点
1	表(1点)
	裏(2点)
2	表表(2点)
	表裏(3点)
	裏裏(4点)
3	表表表(3点)
	表表裏(4点)
	表裏裏(5点)
	裏裏裏(6点)
4	表表表表(4点)
	表表表裏(5点)
	表表裏裏(6点)
	表裏裏裏(7点)
	裏裏裏裏(8点)

次に、Bの結果とその得点は以下の表の通りである。

		サイコロで出た数			
		1	2	3	4
コインの表裏	表	1点	2点	3点	4点
	裏	2点	4点	6点	8点

以上より A の得点が B の得点より大きくなるパターンとその確率は以下の通りである。

[1] A が 2 点で B が 1 点のとき

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{128}$$

[2] A が 3 点で B が 1, 2 点のとき

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{256}$$

[3] A が 4 点で B が 1, 2, 3 点のとき

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\right)\cdot\frac{4}{8}=\frac{11}{128}$$

[4] A が 5 点で B が 1, 2, 3, 4 点のとき

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16}\right)\cdot\frac{6}{8}=\frac{15}{128}$$

[5] A が 6 点で B が 1, 2, 3, 4 点のとき

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{16}\right)\cdot\frac{6}{8}=\frac{3}{32}$$

[6] A が 7 点で B が 1, 2, 3, 4, 6 点のとき

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{128}$$

[7] A が 8 点で B が 1, 2, 3, 4, 6 点のとき

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{512}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{3}{128}+\frac{15}{256}+\frac{11}{128}+\frac{15}{128}+\frac{3}{32}+\frac{7}{128}+\frac{7}{512}=\frac{229}{512}$$

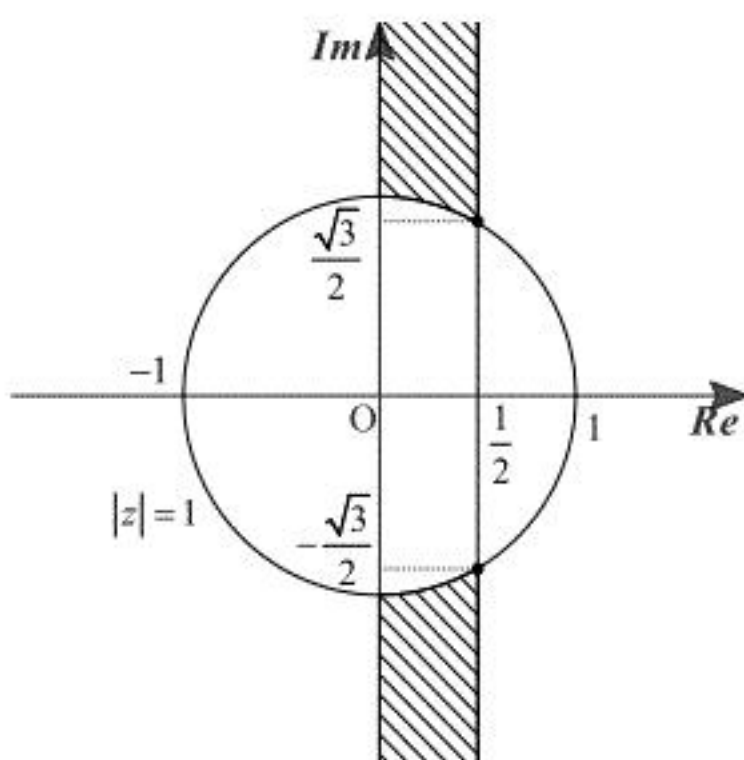
となる。

$$0 \leq z + \bar{z} \leq 1 \leq |z| \Leftrightarrow 0 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 1 \leq |z| \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、満たすべき条件は、 $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}$ かつ $|z| \geq 1$ である。以上より求める領域 A は、

原点中心、半径1の円の周および外部で、実部が0以上 $\frac{1}{2}$ 以下の部分である。これを図示する

と以下の斜線部である。ただし境界は含む。



次に $\alpha = -z^{-1}$ とおくと、上の図より $z \neq 0$ であるから、

$$\alpha = -\frac{1}{z} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\alpha}$$

と変形できる。ただし、 $\alpha \neq 0$ である。これを①に代入して、

$$0 \leq z + \bar{z} \leq 1 \leq |z|$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \leq 1 \leq \left| -\frac{1}{\alpha} \right|$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}} \leq 1 \leq \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -(\alpha + \bar{\alpha}) \text{ かつ } -(\alpha + \bar{\alpha}) \leq \alpha \bar{\alpha} \text{ かつ } |\alpha| \leq 1 \left(\because \alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2 > 0 \right)$$

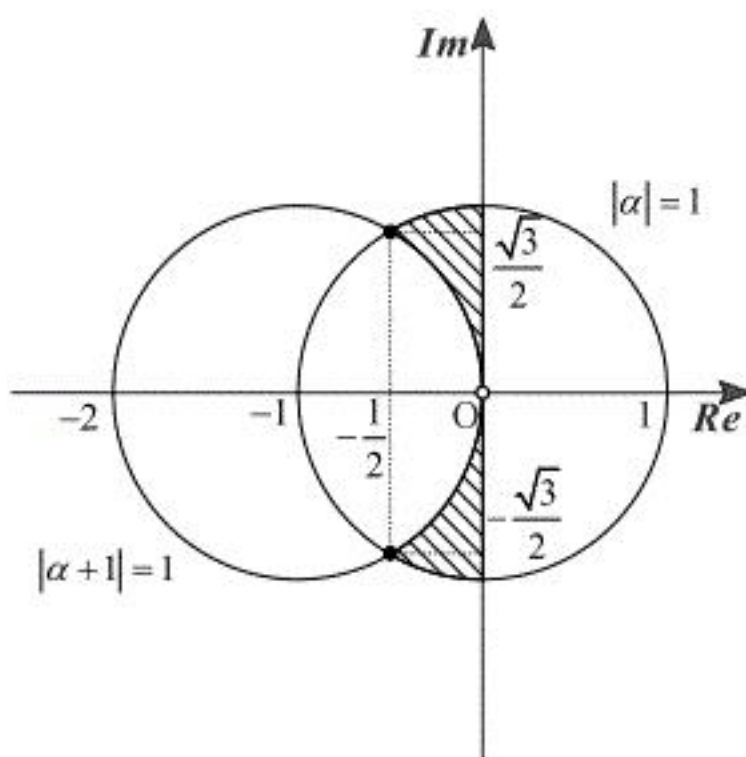
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \leq 0 \text{ かつ } 1 \leq (\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1) \text{ かつ } |\alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\alpha) \leq 0 \text{ かつ } 1 \leq |\alpha + 1| \text{ かつ } |\alpha| \leq 1$$

となる。以上より求める領域 B は、

$$\begin{cases} \text{実部が0以下} \\ \text{中心}(-1, 0), \text{半径1の円の周および外部} \\ \text{原点中心, 半径1の円の周および内部} \end{cases}$$

これら全てを満たす領域の内、 $\alpha = 0$ を除く部分を表す。よって、領域 B が表す部分は、以下の図の斜線部である。ただし境界は、原点を除き、全て含む。



(1)

$f(x) = \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2$ であるから, $f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}$ となる。よって, 曲線 C_0 の長さは,

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log x + \frac{1}{4} x^2 \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2}$$

(2)

$y = f(x)$ の点 $A(x_0, y_0)$ における接線の傾きは, $f'(x_0) = \frac{1-x_0^2}{2x_0}$ であり, また, $AB=1$ である

から,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot (2x_0, 1-x_0^2) = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = 1 \end{cases}$$

が成立する。 $y_1 > y_0$ より $\overrightarrow{AB}$ の y 成分が正となるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{\sqrt{(2x_0)^2 + (1-x_0^2)^2}} (-1+x_0^2, 2x_0) \quad (\because x_0 > 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+x_0^2)^2}} (-1+x_0^2, 2x_0) \\ &= \frac{1}{1+x_0^2} (-1+x_0^2, 2x_0) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \left(x_0, \frac{1}{2} \log x_0 - \frac{1}{4} x_0^2 \right) + \frac{1}{1+x_0^2} (-1+x_0^2, 2x_0) \end{aligned}$$

と表すことができる。以上より,

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{-1+x_0^2}{1+x_0^2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \log x_0 - \frac{1}{4} x_0^2 + \frac{2x_0}{1+x_0^2} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{-1+x_0^2}{1+x_0^2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \log x_0 - \frac{1}{4} x_0^2 + \frac{2x_0}{1+x_0^2} \end{cases}$$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_0} &= 1 + \frac{4x_0}{(1+x_0^2)^2} \\ &= \frac{(1+x_0^2)^2 + 4x_0}{(1+x_0^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx_0} &= \frac{1}{2x_0} - \frac{1}{2} x_0 + \frac{2-2x_0^2}{(1+x_0^2)^2} \\ &= \frac{\{(1+x_0^2)^2 + 4x_0\}(1-x_0^2)}{2x_0(1+x_0^2)^2} \\ &= \frac{1-x_0^2}{2x_0} \cdot \frac{dx_1}{dx_0} \end{aligned}$$

である。以上より求める長さは,

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_0}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx_0}\right)^2} dx_0 &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(1 + \frac{(1-x_0^2)^2}{4x_0^2}\right) \left(\frac{dx_1}{dx_0}\right)^2} dx_0 \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+x_0^2)^2}{4x_0^2} \left\{1 + \frac{4x_0}{(1+x_0^2)^2}\right\}^2} dx_0 \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x_0^2}{2x_0} \left\{1 + \frac{4x_0}{(1+x_0^2)^2}\right\} dx_0 \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2x_0} + \frac{x_0}{2}\right) dx_0 + 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x_0^2} dx_0 \end{aligned}$$

である。ここで(1)より,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2x_0} + \frac{x_0}{2}\right) dx_0 = \frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2}$$

である。また, $x_0 = \tan \theta$ とおくと, $\frac{dx_0}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり, x_0 が $1 \rightarrow \sqrt{3}$ を動くとき θ は $\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

を動く。よって,

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x_0^2} dx_0 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{dx_0}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。ゆえに, C_1 の長さは,

$$\frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$$

a, b は 2 以上の整数であるから, $\log_a b > 0$ である。よって, $\log_a b$ が有理数ならば, 互いに素な自然数 m, n を用いて,

$$\log_a b = \frac{n}{m}$$

と表せる。この式を変形すると,

$$\log_a b = \frac{n}{m}$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{n}{m}} = b$$

$$\Leftrightarrow a^n = b^m$$

と表すことができる。ここで, 両辺の素因数に注目する。 a, b に含まれる異なる素因数 $p_1, p_2, \dots, p_N$ について, $p_i (1 \leq i \leq N)$ の個数をそれぞれ k_i, l_i とおくと,

$$(p_i^{k_i})^n = (p_i^{l_i})^m$$

$$\Leftrightarrow k_i n = l_i m$$

が成り立つ。 m と n は互いに素であるから, k_i と l_i の少なくとも一方は正より, 自然数 α_i を用いて,

$$\begin{cases} k_i = m\alpha_i \\ l_i = n\alpha_i \end{cases}$$

と表すことができる。したがって,

$$\begin{cases} a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N} \\ b = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdots p_N^{l_N} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N})^m \\ b = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N})^n \end{cases}$$

であるから, 2 以上の整数 $c = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N}$ が存在して, $a = c^m, b = c^n$ と表される。

(証明終)