

問題 1

(1)

もらったブドウ、モモ、スモモの数をそれぞれ x, y, z とする。 x, y, z は全て自然数であり $x > y > z$ が成り立ち、問題の条件より

$$\begin{cases} x = 3z \\ 2y + 3z = 21 \end{cases}$$

が得られる。第2式において $2y$ は偶数、 21 は奇数であるため $3z$ は奇数である。従って z も奇数である。ここで

$$\begin{aligned} 2y &> 0 \\ \Leftrightarrow 21 - 3z &> 0 \\ \Leftrightarrow z &< 7 \end{aligned}$$

であることより、 z として考えられるのは $z = 1, 3, 5$ である。それぞれの場合について

$x = 3z, y = \frac{1}{2}(21 - 3z)$ より、 x, y の値を求めると

$$(x, y, z) = (3, 9, 1), (9, 6, 3), (15, 3, 5)$$

となる。これらの組のなかで $x > y > z$ を満たすのは $(x, y, z) = (9, 6, 3)$ だけである。従って求めるもらった果物の総数は

$$x + y + z = 18$$

より18個である。

(答) 18 個

(2)

$$50^{\frac{1}{2}} = \sqrt{50} > 7 = 50^{\log_{50} 7}$$

であり、 $f(x) = 50^x$ は単調増加関数であるため、 $\frac{1}{2} > \log_{50} 7$ である。また、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125 < 0.13 = \left(\sqrt[3]{0.13}\right)^3$$

であり、 $g(x) = x^3$ は単調増加関数であるため、 $\frac{1}{2} < \sqrt[3]{0.13}$ である。以上より

$$\log_{50} 7 < \frac{1}{2} < \sqrt[3]{0.13}$$

が分かる。

(答) $\log_{50} 7 < \frac{1}{2} < \sqrt[3]{0.13}$

(3)

赤玉 p 個、青玉 q 個、白玉 r 個の合計 n 個について、それぞれ区別があるとする。このとき、合計 n 個のすべてを1列に並べてできる順列の総数は、1つ目の玉の選び方は n 通り、その次は $n-1$ 通り、と考えて $n!$ 通りである。ここで実際には赤玉、青玉、白玉にはそれぞれ区別がない。すると赤玉については、赤玉だけの並べ替えの総数である $p!$ 通りだけ重複して数えており、青玉については $q!$ 通り、白玉については $r!$ 通りだけ重複して数えている。したがって赤玉 p 個、青玉 q 個、白玉 r 個の合計 n 個のすべてを1列に並べてできる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

となる。

(証明終)

(4)

倍角の公式より

$$\begin{cases} \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \\ \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

となるため

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1 - \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{3}{4}\pi\right) + 1\right\} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{3}{4}\pi \leq 2\theta + \frac{3}{4}\pi \leq \frac{11}{4}\pi$ であるため、 y は

$$2\theta + \frac{3}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{7}{8}\pi \text{ のとき最大値 } \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$2\theta + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{8}\pi \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}(-\sqrt{2} + 1) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

を取る。

(答) 最大値: $\theta = \frac{7}{8}\pi$ のとき $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, 最小値: $\theta = \frac{3}{8}\pi$ のとき $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

問題 2

(1)

$$f(x) = 2x^3 + px^2 + qx + 1 \text{ より}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2px + q$$

である。 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとるため、必要条件として

$$f'(1) = 2p + q + 6 = 0$$

が成り立つ。また

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \{2(x+1)^3 + p(x+1)^2 + q(x+1) + 1\} - \{2x^3 + px^2 + qx + 1\} \\ &= 2\{(x+1)^3 - x^3\} + p\{(x+1)^2 - x^2\} + q\{(x+1) - x\} \\ &= 2(3x^2 + 3x + 1) + p(2x + 1) + q \\ &= 6x^2 + 2(p+3)x + p + q + 2 \end{aligned}$$

であるため

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{f(x+1) - f(x)\} dx &= 26 \\ \Leftrightarrow \int_0^2 \{6x^2 + 2(p+3)x + p + q + 2\} dx &= 26 \\ \Leftrightarrow [2x^3 + (p+3)x^2 + (p+q+2)x]_0^2 &= 26 \\ \Leftrightarrow 16 + 4(p+3) + 2(p+q+2) &= 26 \\ \Leftrightarrow 3p + q &= -3 \end{aligned}$$

となる。従って求める p, q の値は

$$\begin{cases} 2p + q = -6 \\ 3p + q = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = -12 \end{cases}$$

である。ここで関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

となり、 $f'(x)$ は $x=1$ の前後で符号が変わるため、確かに関数 $f(x)$ は $x=1$ において極値を取る。

(答) $p=3, q=-12$

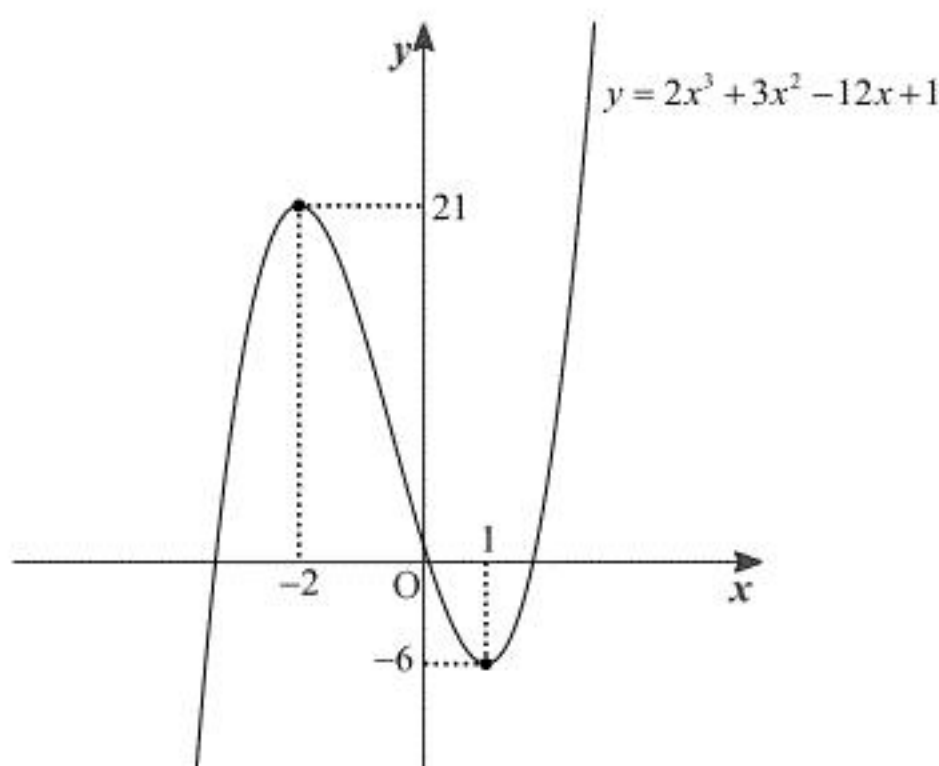
(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

であるため関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ の増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-6	$\nearrow$

従って $y=f(x)$ のグラフは下のようになる。



方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数は $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの異なる共有点の個数である。従って $y=a$ のグラフは x 軸に平行であることを考えて、求める異なる実数解の個数は

$a < -6, a > 21$ のとき 1 個

$a = -6, 21$ のとき 2 個

$-6 < a < 21$ のとき 3 個

である。

(答) $a < -6, a > 21$ のとき 1 個, $a = -6, 21$ のとき 2 個, $-6 < a < 21$ のとき 3 個

問題 3

(1)

与えられた点の座標より

$$AB=\sqrt{p^2+(b-a)^2}, AC=\sqrt{q^2+(c-a)^2}, BC=\sqrt{p^2+q^2+(c-b)^2}$$

となり、条件より $AB=a+b, AC=a+c, BC=b+c$ であるため

$$\begin{cases} \sqrt{p^2+(b-a)^2}=a+b \\ \sqrt{q^2+(c-a)^2}=a+c \\ \sqrt{p^2+q^2+(c-b)^2}=b+c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p^2+(b-a)^2=(a+b)^2 \ (\because a+b>0) \\ q^2+(c-a)^2=(a+c)^2 \ (\because a+c>0) \\ p^2+q^2+(c-b)^2=(b+c)^2 \ (\because b+c>0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p^2=4ab \\ q^2=4ca \\ p^2+q^2=4bc \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p=2\sqrt{ab} \ (\because p>0) \\ q=2\sqrt{ca} \ (\because q>0) \\ ab+ca=bc \end{cases}$$

となる。第3式より

$$a=\frac{bc}{b+c}$$

となることが示せた。

(答) $p=2\sqrt{ab}, q=2\sqrt{ca}$

(証明終)

(2)

条件より $B'(p, 0, 0), C'(0, q, 0)$ であるため、 $\overline{BB'}=(0, 0, -b), \overline{CC'}=(0, 0, -c)$ となる。従って

$\overline{BB'}=\frac{b}{c}\overline{CC'}$ と書ける。ここで $b \neq 0$ のため、2つのベクトル $\overline{BB'}, \overline{CC'}$ は平行である。よって4

点 B, B', C, C' は同一平面 α 上にある。

(証明終)

次に平面 α 上の点 D について、 $\overline{AB}, \overline{AC'}, \overline{AB'}$ は一次独立であるため、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= s\overline{AB} + t\overline{AC'} + (1-s-t)\overline{AB'} \\ &= s(p, 0, b-a) + t(0, q, -a) + (1-s-t)(p, 0, -a) \\ &= ((1-t)p, tq, sb-a) \end{aligned}$$

と表せる。 $\overline{AD}$ は平面 α と垂直であるため、 $\overline{AD} \perp \overline{BB'}, \overline{AD} \perp \overline{B'C'}$ が成り立つ。従って

$\overline{BB'}=(0, 0, -b), \overline{B'C'}=(-p, q, 0)$ より

$$\begin{cases} \overline{AD} \cdot \overline{BB'} = 0 \\ \overline{AD} \cdot \overline{B'C'} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (sb-a)b=0 \\ -(1-t)p^2 + tq^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s=\frac{a}{b} \\ t=\frac{p^2}{p^2+q^2}=\frac{b}{b+c} \ (\because p^2=4ab, q^2=4ca) \end{cases}$$

と実数 s, t が求まる。ゆえに

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= ((1-t)p, tq, sb-a) \\ &= \left(\frac{2c\sqrt{ab}}{b+c}, \frac{2b\sqrt{ca}}{b+c}, 0 \right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \overline{AD} - \overline{AO} \\ &= \left(\frac{2c\sqrt{ab}}{b+c}, \frac{2b\sqrt{ca}}{b+c}, 0 \right) - (0, 0, -a) \\ &= \left(\frac{2c\sqrt{ab}}{b+c}, \frac{2b\sqrt{ca}}{b+c}, a \right) \\ &= \left(\frac{2bc\sqrt{c(b+c)}}{(b+c)^2}, \frac{2bc\sqrt{b(b+c)}}{(b+c)^2}, \frac{bc}{b+c} \right) \left(\because a=\frac{bc}{b+c} \right) \end{aligned}$$

である。従って点 D の座標は

$$\left(\frac{2bc\sqrt{c(b+c)}}{(b+c)^2}, \frac{2bc\sqrt{b(b+c)}}{(b+c)^2}, \frac{bc}{b+c} \right)$$

である。

(答) $\left(\frac{2bc\sqrt{c(b+c)}}{(b+c)^2}, \frac{2bc\sqrt{b(b+c)}}{(b+c)^2}, \frac{bc}{b+c} \right)$

(3)

$A\left(0, 0, \frac{bc}{b+c}\right), B'\left(2b\sqrt{\frac{c}{b+c}}, 0, 0\right), C'\left(0, 2c\sqrt{\frac{b}{b+c}}, 0\right)$ より $\triangle OB'C'$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2b\sqrt{\frac{c}{b+c}} \cdot 2c\sqrt{\frac{b}{b+c}} = \frac{2bc\sqrt{bc}}{b+c}$$

であるため

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{2bc\sqrt{bc}}{b+c} = \frac{2b^2c^2\sqrt{bc}}{3(b+c)^2}$$

と求まる。また $B\left(2b\sqrt{\frac{c}{b+c}}, 0, b\right), B'\left(2b\sqrt{\frac{c}{b+c}}, 0, 0\right), C'\left(0, 2c\sqrt{\frac{b}{b+c}}, 0\right), C\left(0, 2c\sqrt{\frac{b}{b+c}}, c\right)$ で

あるため、台形 $BB'C'C$ は BB' と CC' が平行な辺であり、 $B'C' \perp CC'$ かつ

$$B'C' = \sqrt{\left(2b\sqrt{\frac{c}{b+c}}\right)^2 + \left(2c\sqrt{\frac{b}{b+c}}\right)^2} = 2\sqrt{bc} \text{ よりその面積は}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (b+c) \cdot 2\sqrt{bc} = (b+c)\sqrt{bc}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{\left(\frac{2bc\sqrt{c(b+c)}}{(b+c)^2}\right)^2 + \left(\frac{2bc\sqrt{b(b+c)}}{(b+c)^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4b^2c^2(b+c)^2}{(b+c)^4}} \\ &= \frac{2bc}{b+c} \end{aligned}$$

より

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (b+c)\sqrt{bc} \cdot \frac{2bc}{b+c} = \frac{2bc\sqrt{bc}}{3}$$

と求まる。

(答) $V_1 = \frac{2b^2c^2\sqrt{bc}}{3(b+c)^2}, V_2 = \frac{2bc\sqrt{bc}}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{pq}{2} &= \frac{a+b+c}{3} \cdot 2a\sqrt{bc} \ (\because p=2\sqrt{ab}, q=2\sqrt{ac}) \\ &= \frac{\frac{bc}{b+c} + b+c}{3} \cdot \frac{2bc\sqrt{bc}}{b+c} \left(\because a=\frac{bc}{b+c} \right) \\ &= \frac{bc+(b+c)^2}{3(b+c)} \cdot \frac{2bc\sqrt{bc}}{b+c} \\ &= \frac{2bc\sqrt{bc}(b^2+3bc+c^2)}{3(b+c)^2} \end{aligned}$$

となるため、 $V_1+V_2=\frac{a+b+c}{3} \times \frac{pq}{2}$ が示された。

(証明終)