

1

(1)

硬貨を投げる試行は独立である。Aが勝つとき、最後に投げた硬貨は表である。これを考慮して、最初に表が出たとき、以下の4つの場合を考える。

[1] 裏が1回も出ないとき

表が3回連続で出るから、確率は

$$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

となる。

[2] 裏が1回出るとき

表が2回、裏が1回出た後、最後に表が出るから、確率は

$${}_3C_1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{16}$$

となる。

[3] 裏が2回出るとき

表が2回、裏が2回出た後、最後に表が出るから、確率は

$${}_4C_2 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

となる。

[4] 裏が3回出るとき

表が2回、裏が3回出た後、最後に表が出るから、確率は

$${}_5C_3 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

となる。

以上[1]~[4]は互いに排反な事象であるから、求める確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} = \frac{21}{32}$$

と求まる。

(答) $\frac{21}{32}$

(2)

$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta$ であり、 x と θ の対応は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

このとき与えられた定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4-3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta\right)^2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta\right) d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ より $\cos \theta \geq 0$ であるから、 $\sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$ である。ゆえ

に、求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4-3x^2} dx &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2\sqrt{3}}{9} \pi + \frac{1}{2}$

(3)

$$\frac{a^3+a}{a+1} = \frac{b^3+b}{b+1} = \frac{c^3+c}{c+1} = k$$

とおくと

$$\begin{cases} a^3+a=k(a+1) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b^3+b=k(b+1) & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c^3+c=k(c+1) & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。 $a \neq b$ であることを利用して、 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} a^3+a-b^3-b &= k(a+1)-k(b+1) \\ \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1) &= k(a-b) \\ \Leftrightarrow a^2+ab+b^2+1 &= k \quad (\because a-b \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。同様に、 $a \neq c$ であることを利用して、 $\textcircled{1}-\textcircled{3}$ より、

$$\begin{aligned} a^3+a-c^3-c &= k(a+1)-k(c+1) \\ \Leftrightarrow (a-c)(a^2+ac+c^2+1) &= k(a-c) \\ \Leftrightarrow a^2+ac+c^2+1 &= k \quad (\because a-c \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\textcircled{4}-\textcircled{5}$ より、

$$(b-c)(a+b+c)=0$$

が得られる。 $b \neq c$ より $b-c \neq 0$ であるから、

$$a+b+c=0$$

である。

(証明終)

2

(1)

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ であるから}$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$$

$$a_3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$$

となる。

(答) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4$

(2)

$$\begin{aligned} & a_{n+2} - (a_{n+1} + a_n) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot 0 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ である。

(証明終)

(3)

すべての自然数 n で

$$a_n \text{ が自然数である} \quad \dots \textcircled{1}$$

ことを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(1)より $a_1 = 1, a_2 = 3$ であるから、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] k を自然数として、 $n=k, k+1$ で $\textcircled{1}$ が成立すると仮定するとき

(2)より $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ なので a_{k+2} も自然数であり、 $n=k+2$ で $\textcircled{1}$ が成立する。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n で $\textcircled{1}$ が成立する。

(証明終)

(4)

すべての自然数 n で

$$a_n \text{ と } a_{n+1} \text{ が互いに素である} \quad \dots \textcircled{2}$$

ことを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

(1)より $a_1 = 1, a_2 = 3$ であるから、 $\textcircled{2}$ は成立する。

[2] k を自然数として、 $n=k$ で $\textcircled{2}$ が成立すると仮定するとき

a_{k+1} と a_{k+2} の最大公約数を d として

$$\begin{cases} a_{k+1} = dA \\ a_{k+2} = dB \end{cases}$$

と表せる。ただし、ここで A, B は互いに素な自然数である。(2)より $a_k = a_{k+2} - a_{k+1}$ であるから、

$$a_k = d(B - A)$$

となる。ゆえに、 d は a_k と a_{k+1} の公約数である。いま、仮定より a_k と a_{k+1} が互いに素であるから、 $d=1$ である。よって、 a_{k+1} と a_{k+2} は互いに素であり、 $n=k+1$ で $\textcircled{2}$ が成立する。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n で $\textcircled{2}$ が成立する。

(証明終)

3

(1)

$y = ax^2 + b$ について $y' = 2ax$ であるから、接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2ar(x-r) + ar^2 + b \\ &= 2arx - ar^2 + b \end{aligned}$$

と表せる。ゆえに、接線 ℓ と y 軸との交点の座標は $(0, -ar^2 + b)$ である。

(答) $(0, -ar^2 + b)$

(2)

接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は接線 ℓ の式に $y = 0$ を代入して

$$\begin{aligned} 0 &= 2arx - ar^2 + b \\ \therefore x &= \frac{ar^2 - b}{2ar} \end{aligned}$$

と分かる。よって、円錐 T の底面の円の半径は $\left| \frac{ar^2 - b}{2ar} \right|$ となり、その体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left| \frac{ar^2 - b}{2ar} \right|^2 \cdot \pi \cdot h \\ &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{(ar^2 - b)^2}{a^2 r^2} h \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。ここで、(1)より $h = -ar^2 + b$ であるから、 $r^2 = \frac{b-h}{a}$ である。これを①に代入して

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\left\{ a \left(\frac{b-h}{a} \right) - b \right\}^2}{a^2 \cdot \frac{b-h}{a}} h \\ &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{h^3}{a(b-h)} \end{aligned}$$

と求まる。

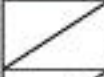
(答) $\frac{\pi}{12} \cdot \frac{h^3}{a(b-h)}$

(3)

V を h で微分すると

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\pi}{12a} \cdot \frac{3h^2 \cdot (b-h) - h^3 \cdot (-1)}{(b-h)^2} \\ &= \frac{\pi}{12a} \cdot \frac{h^2(3b-2h)}{(b-h)^2} \end{aligned}$$

となる。 $a < 0$ を考慮すると、 $h > b$ となるから次のような増減表が得られる。

h	b	$\cdots$	$\frac{3}{2}b$	$\cdots$
V'		$-$	0	$+$
V		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、体積 V は $h = \frac{3}{2}b$ のとき最小となり、このとき V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}b \right)^3}{a \left(b - \frac{3}{2}b \right)} \\ &= -\frac{9b^2}{16a} \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $h = \frac{3}{2}b$ のとき V の最小値 $-\frac{9b^2}{16a} \pi$

4

(1)

$$x(t)=2t-\sin t \text{ より}$$

$$\frac{dx}{dt}=2-\cos t$$

である。ここで、 $-1 \leq \cos t \leq 1$ であるから、 $\frac{dx}{dt} > 0$ である。ゆえに、 $x(t)$ はつねに増加する。

(証明終)

また、 $x(t)$ は $0 \leq t \leq \pi$ で連続関数であり、

$$x(0)=0, x(\pi)=2\pi$$

であるから、 $x(t)$ の取り得る値の範囲は $0 \leq x(t) \leq 2\pi$ である。

$$\text{(答)} \quad 0 \leq x(t) \leq 2\pi$$

(2)

$$y(t)=\sin t \cos^3 t \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \cos t \cdot \cos^3 t + \sin t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) \\ &= \cos^4 t - 3 \sin^2 t \cos^2 t \\ &= \cos^4 t - 3(1 - \cos^2 t) \cos^2 t \\ &= 4 \cos^4 t - 3 \cos^2 t \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{dy}{dt} = 4 \cos^4 t - 3 \cos^2 t$$

(3)

$y(t)=0$ となるとき $\sin t=0$ または $\cos t=0$ であり、 $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で解くと、 $t=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ である。また、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 4 \cos^4 t - 3 \cos^2 t \\ &= 4 \cos^2 t \left(\cos^2 t - \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

であり、 $\frac{dy}{dt}=0$ を $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で解くと、 $t=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$ となり、 $y(t)$ の $0 \leq t \leq \pi$ における増減表は以下のようになる。

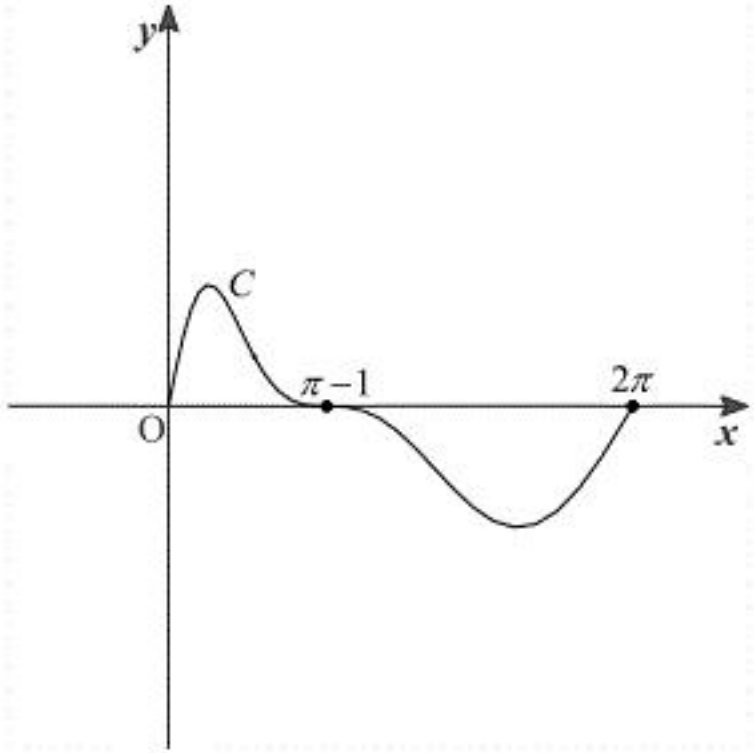
t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$\frac{dy}{dt}$	↗	+	0	-	0	-	0	+	↘
$y(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	↗	0

よって増減表より、 $y(t)$ の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ である。

$$\text{(答)} \quad y(t)=0 \text{ となる } t: t=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \quad y(t) \text{ の最大値: } \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

(4)

$x(t)$ がつねに増加することと、(3)の増減表より曲線 C の概形は下図のようになる。



よって、求める面積 S は

$$S = \int_0^{\pi-1} y dx$$

と表せる。ここで、 x と t の対応は以下のようになるので、

x	0	→	$\pi-1$
t	0	→	$\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi-1} y dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^3 t (2 - \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t - 2 \cos^3 t) (\cos t)' dt \\ &= \left[\frac{1}{5} \cos^5 t - \frac{1}{2} \cos^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{10}$$