

問題 1

(1)

山梨大学のある学科の全ての学生の集合を U 、このうち、山梨県内出身の学生の集合を P 、身長が170cm 未満の学生の集合を Q とし、それぞれの集合の要素の個数を $n(U), n(P), n(Q)$ とすると、求めるべきは、 $n(P \cap Q)$ の値である。すると、仮定から、

$$\begin{cases} n(U) = 30 \\ n(P) = 17 \\ n(\overline{P} \cup Q) = 26 \end{cases}$$

であるから、ド・モルガンの法則より、

$$\begin{aligned} n(P \cap Q) &= n(P) - n(P \cap \overline{Q}) \\ &= n(P) - \left\{ n(U) - n(\overline{P \cap Q}) \right\} \\ &= n(P) - n(U) + n(\overline{P} \cup Q) \\ &= 17 - 30 + 26 \\ &= 13 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 13 名

(2)

A, B はともに鋭角であり、 $\cos A > 0, \cos B > 0$ であるから、 $\sin A = \frac{4}{5}, \sin B = \frac{12}{13}$ より、

$$\begin{aligned} \cos A &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \\ \cos B &= \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin \{ \pi - (A + B) \} \\ &= \sin (A + B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} \\ &= \frac{56}{65} \end{aligned}$$

となる。従って、正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} \\ \therefore \begin{cases} a = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = 14 \cdot \frac{65}{56} \cdot \frac{4}{5} = 13 \\ b = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin B = 14 \cdot \frac{65}{56} \cdot \frac{12}{13} = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a = 13, b = 15$

(3)

600 を素因数分解すると、

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

となる。 $A = 2^l \cdot 3^m \cdot 5^n, B = 2^{3-l} \cdot 3^{1-m} \cdot 5^{2-n}$ (l, m, n は負でない整数) とすると、 A と B は互いに素であり、 A と B に同じ素因数が含まれてはいけなから、 l は $l = 0, 3$ の2通りである。同様に、 m は $m = 0, 1$ の2通りであり、 n は $n = 0, 2$ の2通りである。よって、組 (l, m, n) の個数は、

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ (通り)}$$

と求まる。

(答) 8 通り

(4)

$(w+x+y+z)^4 = (w+x+y+z)(w+x+y+z)(w+x+y+z)(w+x+y+z)$ を展開したときの

$wxyz$ の係数は、 w, x, y, z の中から重複なしで1個ずつ選んで1列に並べる順列の数に等しいから、

$$4! = 24$$

となる。よって、 $(4a+3b+2c+d)^4$ を展開したときの $abcd$ の係数は、

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 24 = 576$$

と求まる。

(答) 576

問題 2

(1)

$f(x) = |x^2 - t^2|$ ($0 \leq x \leq 1, t > 0$) とする。

[1] $0 < t < 1$ のとき

$f(x)$ は,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + t^2 & (0 \leq x < t) \\ x^2 - t^2 & (t \leq x) \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t (-x^2 + t^2) dx + \int_t^1 (x^2 - t^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + t^2x \right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 - t^2x \right]_t^1 \\ &= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $1 \leq t$ のとき

$f(x)$ は,

$$f(x) = -x^2 + t^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であるから,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^1 (-x^2 + t^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + t^2x \right]_0^1 \\ &= t^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

以上, [1], [2] より答えが求まる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} & (0 < t < 1) \\ t^2 - \frac{1}{3} & (1 \leq t) \end{cases}$$

(2)

[1] $0 < t < 1$ のとき

$S(t)$ を t について微分すると,

$$S'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t - 1)$$

であるから, このときにおける $S(t)$ の増減表は以下の通りである。

t	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$			(極小値)		

よって, 増減表から, このときにおける $S(t)$ の最小値は, $t = \frac{1}{2}$ のとき,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] $1 \leq t$ のとき

$$S(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

であるから, このときにおける $S(t)$ の最小値は, $t = 1$ のとき,

$$S(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

である。

以上[1], [2]より, $t > 0$ における $S(t)$ の最小値は, $t = \frac{1}{2}$ のとき, $\frac{1}{4}$ である。

(答) $\frac{1}{4}$

問題 3

(1)

仮定から、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$ に $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を代入すると、 $|\vec{a}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = r$ より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) &= p \\ \Leftrightarrow x|\vec{a}|^2 + y\vec{a} \cdot \vec{b} &= p \\ \Leftrightarrow x + ry &= p \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)と同様にして、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = q$ に $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を代入すると、 $|\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = r$ より、

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot (x\vec{a} + y\vec{b}) &= q \\ \Leftrightarrow x\vec{a} \cdot \vec{b} + y|\vec{b}|^2 &= q \\ \Leftrightarrow rx + y &= q \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではないから、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とすると、 $\theta \neq 0^\circ, 180^\circ$ より、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \neq \pm 1 \Leftrightarrow r \neq \pm 1$$

となる。よって、②は、

$$rx + y = q \Leftrightarrow y = -rx + q$$

と変形でき、これを①に代入すると、

$$\begin{aligned}x + r(-rx + q) &= p \\ \therefore x &= \frac{p - qr}{1 - r^2}\end{aligned}$$

と求まる。また、これを②に代入すると、

$$\begin{aligned}r \cdot \frac{p - qr}{1 - r^2} + y &= q \\ \therefore y &= \frac{q - pr}{1 - r^2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{p - qr}{1 - r^2}, y = \frac{q - pr}{1 - r^2}$$

(3)

$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であり、かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではないから、 $\vec{b} - z\vec{a} \neq \vec{0}$ である。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b} - z\vec{a}$ が垂直になるとき、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} - z\vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - z|\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow r - z &= 0 \\ \therefore z &= r\end{aligned}$$

と求まる。また、これと、(2)の結果から、

$$\begin{aligned}\vec{c} &= s\vec{a} + t(\vec{b} - z\vec{a}) \\ \Leftrightarrow \frac{p - qr}{1 - r^2}\vec{a} + \frac{q - pr}{1 - r^2}\vec{b} &= (s - tr)\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{p - qr}{1 - r^2} = s - tr & \dots \textcircled{3} \\ \frac{q - pr}{1 - r^2} = t & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成立し、④を③に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{p - qr}{1 - r^2} &= s - \frac{q - pr}{1 - r^2} \cdot r \\ \therefore s &= p\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad s = p, t = \frac{q - pr}{1 - r^2}$$