

1

(1)

以下、合同式の法はすべて3とする。仮定より、 a, b はそれぞれ

$$\begin{cases} a \equiv 1 \\ b \equiv 1 \end{cases}$$

と表せる。よって

$$ab \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1$$

となり、 ab を3で割ると余りは1であることが示された。

(証明終)

また仮定より、 m, n はそれぞれ

$$\begin{cases} m \equiv \pm 1 \\ n \equiv \pm 1 \end{cases}$$

と表せる。よって、

$$m^2 + n^2 \equiv (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 \equiv 2$$

と求まる。

(答) 2

(2)

$$\begin{cases} X = 3x - 2y \\ Y = 2x + 3y \end{cases}$$

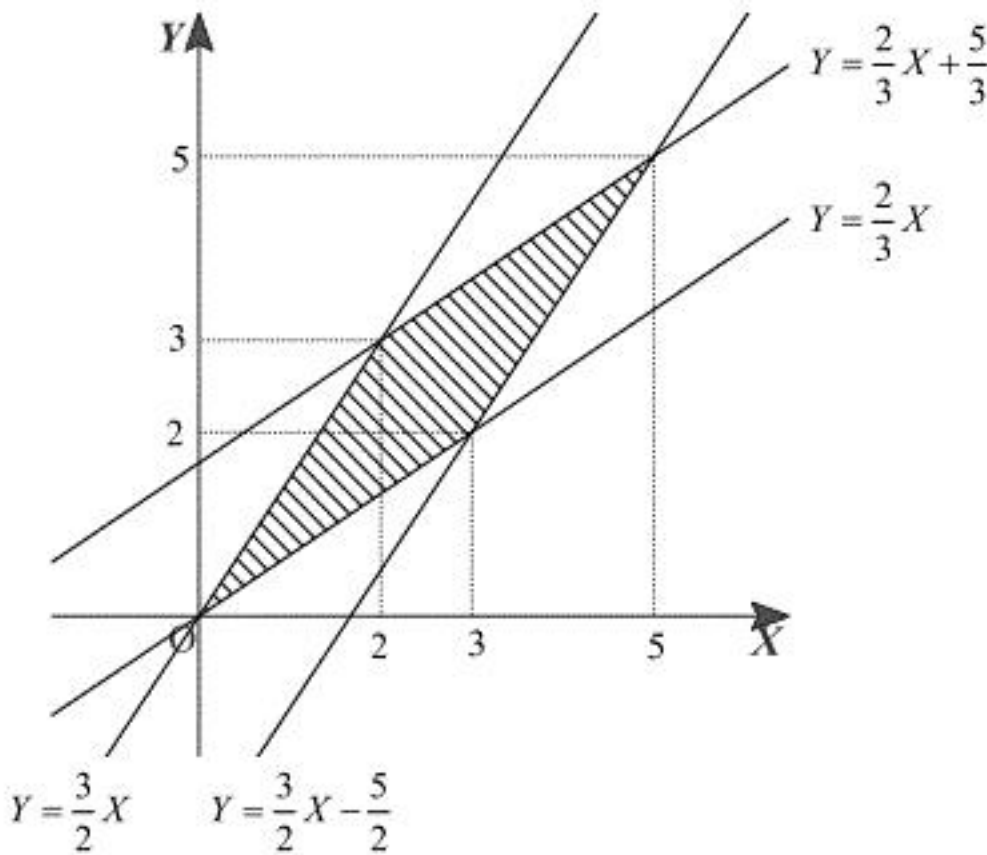
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}X - \frac{2}{5}Y \\ y = -\frac{2}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$$

より、実数 (x, y) が $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ を満たしながら動くとき、実数 (X, Y) は

$$0 \leq \frac{3}{5}X - \frac{2}{5}Y \leq 1, 0 \leq -\frac{2}{5}X + \frac{3}{5}Y \leq 1$$

$$\therefore \frac{3}{2}X - \frac{5}{2} \leq Y \leq \frac{3}{2}X, \frac{2}{3}X \leq Y \leq \frac{2}{3}X + \frac{5}{3}$$

を満たす。よってこの不等式が XY 平面上で表す領域、すなわち点 (X, Y) の動く領域は以下の斜線部分になる。ただし、境界線上の点をすべて含む。



(答) 前図

(3)

背理法を利用して、複素数 z が実数でないことを示す。すなわち、 z が実数であると仮定して矛盾を導く。 $\sqrt{3}+i, \sqrt{3}+3i, -1+i$ について、それぞれ、

$$\begin{cases} \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) \end{cases}$$

と表せる。よって、複素数 z の偏角は、

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \frac{n}{6}\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\pi \\ &= \frac{2n-5}{12}\pi \end{aligned}$$

となる。また、仮定から、 z は実数であるから、 z の偏角は任意の整数 m を用いて、

$$\arg(z) = m\pi$$

と表せる。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{2n-5}{12}\pi &= m\pi \\ \Leftrightarrow 2n-5 &= 12m \end{aligned}$$

となるが、これは左辺が奇数であり、右辺が偶数であるので矛盾する。従って、複素数 z は実数でないことが示された。

(証明終)

(1)

直線 $y = 2ax$ と放物線 $C: y = x^2 + 2px + q$ を連立して、

$$\begin{aligned} 2ax &= x^2 + 2px + q \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(p-a)x + q &= 0 \end{aligned}$$

となる。直線 $y = 2ax$ と放物線 C が接するとき、この方程式は重解をもつため、判別式を D として、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (p-a)^2 - q &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立する。同様にすると、直線 $y = 2bx$ と放物線 C が接するとき、

$$(p-b)^2 - q = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。よって、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \{(p-a)^2 - q\} - \{(p-b)^2 - q\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2p-a-b)(a-b) &= 0 \\ \therefore p &= \frac{a+b}{2} \quad (\because a \neq b) \end{aligned}$$

と求まる。また、これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 - q &= 0 \\ \therefore q &= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{a+b}{2}, q = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

(2)

a, b が

$$a \neq b \text{ かつ } a^2 + b^2 = 4$$

を満たすとき、 $a = 2\cos\theta, b = 2\sin\theta \left(0 \leq \theta < 2\pi, \theta \neq \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$ とおける。このとき p は、(1)の結果から、

$$\begin{aligned} p &= \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{2\cos\theta + 2\sin\theta}{2} \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

と表せる。よって、 θ が $\left(0 \leq \theta < 2\pi, \theta \neq \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$ の範囲を動くとき、 p の値の範囲は、

$$-\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$$

(3)

放物線 $C: y = x^2 + 2px + q$ を平方完成すると、

$$y = (x+p)^2 - p^2 + q$$

より、放物線 C の頂点を (X, Y) とすると、 $X = -p, Y = -p^2 + q$ である。(1)の結果より、

$$\begin{cases} X = -\frac{a+b}{2} \\ Y = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = -ab \end{cases}$$

と表せる。よって、 a, b が $a^2 + b^2 = 4$ を満たすとき、

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{4 - 2Y}{4} \end{aligned}$$

となり、これは、

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{4 - 2Y}{4} \\ \Leftrightarrow Y &= -2X^2 + 2 \end{aligned}$$

と変形できる。また、(2)の結果より X は

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} &< p < \sqrt{2} \\ \therefore -\sqrt{2} &< X < \sqrt{2} \end{aligned}$$

の範囲を動くから、以上より、放物線 C の頂点 (x, y) の軌跡は、

$$y = -2x^2 + 2 \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = -2x^2 + 2 \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$$

3

(1)

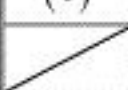
$x > 0$ のとき、

$$f(x) < \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 e^{-x} < 2$$

となるので、 $g(x) = x^2 e^{-x}$ として、 $x > 0$ のとき $g(x) < 2$ であることを示せばよい。 $x > 0$ における $g(x)$ の増減を考える。 $g(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= (2-x)xe^{-x} \end{aligned}$$

となるので、 $x > 0$ における $g(x)$ の増減は次表の通りである。

x	(0)	...	2	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			(極大値)	

ここで、 $e > 2$ より

$$g(2) = \frac{2^2}{e^2} < \frac{2^2}{2^2} = 1 < 2$$

であるため、増減表と合わせて $x > 0$ のとき $g(x) < 2$ 、すなわち、 $f(x) < \frac{2}{x}$ であることが示された。

(証明終)

また、以上の議論から、 $x > 0$ のとき

$$0 < f(x) < \frac{2}{x}$$

が成立する。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

と求まる。

(答) 0

(2)

$f(x)$ の1階微分、2階微分はそれぞれ、

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \\ f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\ &= (x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f(1) = \frac{1}{e}, f(2) = \frac{2}{e^2}$$

より、 $y = f(x)$ の増減、および凹凸は次表の通りである。

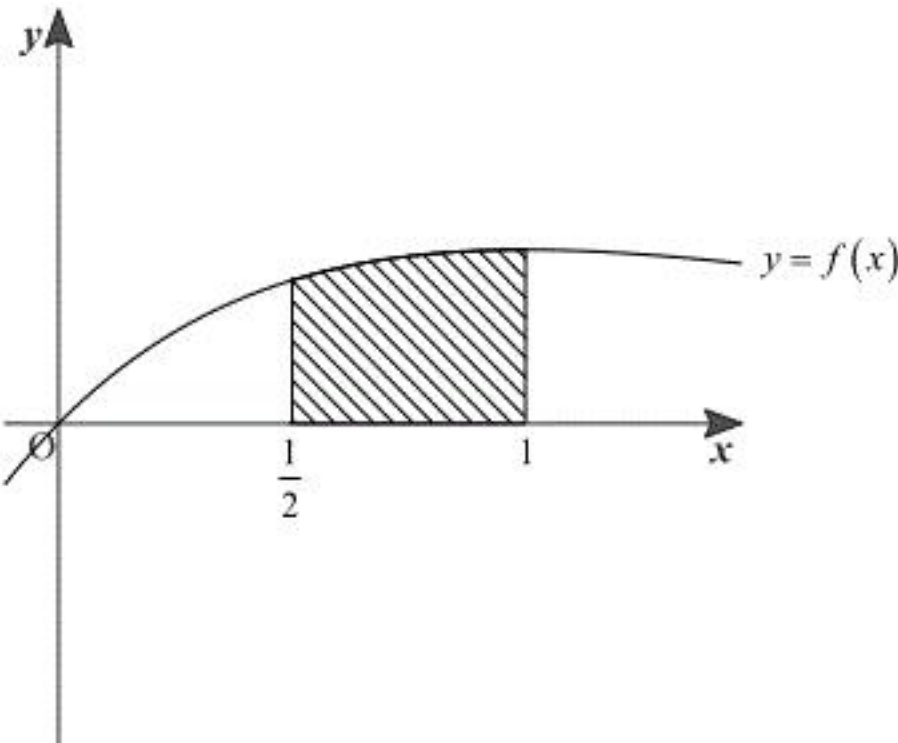
x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$		$\frac{1}{e}$		$\frac{2}{e^2}$	

また、増減表より変曲点は $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ である。

(答) 増減、凹凸：前表、変曲点： $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

(3)

曲線 $y = f(x)$ と x 軸および2直線 $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ で囲まれた図形は、次図の斜線部である。



よって、これを x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \{f(x)\}^2 \pi dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 e^{-2x} dx \\ &= \pi \left(\left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 x e^{-2x} dx \right) \\ &= \pi \left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{8e} + \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-2x} dx \right) \\ &= \pi \left(-\frac{1}{e^2} + \frac{3}{8e} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\ &= \pi \left(-\frac{5}{4e^2} + \frac{5}{8e} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\pi \left(-\frac{5}{4e^2} + \frac{5}{8e} \right)$

(1)

曲線 $A_n: y = f(x) = p_n x^n$, 曲線 $B: y = g(x) = \log x \ (x > 0)$ として, それぞれ x について微分すると,

$$f'(x) = np_n x^{n-1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

であるから, この2つの曲線が共有点 $(a_n, \log a_n)$ で共通の接線をもつとき,

$$\begin{cases} f'(a_n) = g'(a_n) \\ f(a_n) = g(a_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} np_n a_n^{n-1} = \frac{1}{a_n} \\ p_n a_n^n = \log a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} np_n a_n^n = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ p_n a_n^n = \log a_n & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。②を①に代入すると,

$$n \log a_n = 1$$

$$\therefore a_n = e^{\frac{1}{n}}$$

と求まる。また, これを②に再代入すると,

$$p_n \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^n = \log e^{\frac{1}{n}}$$

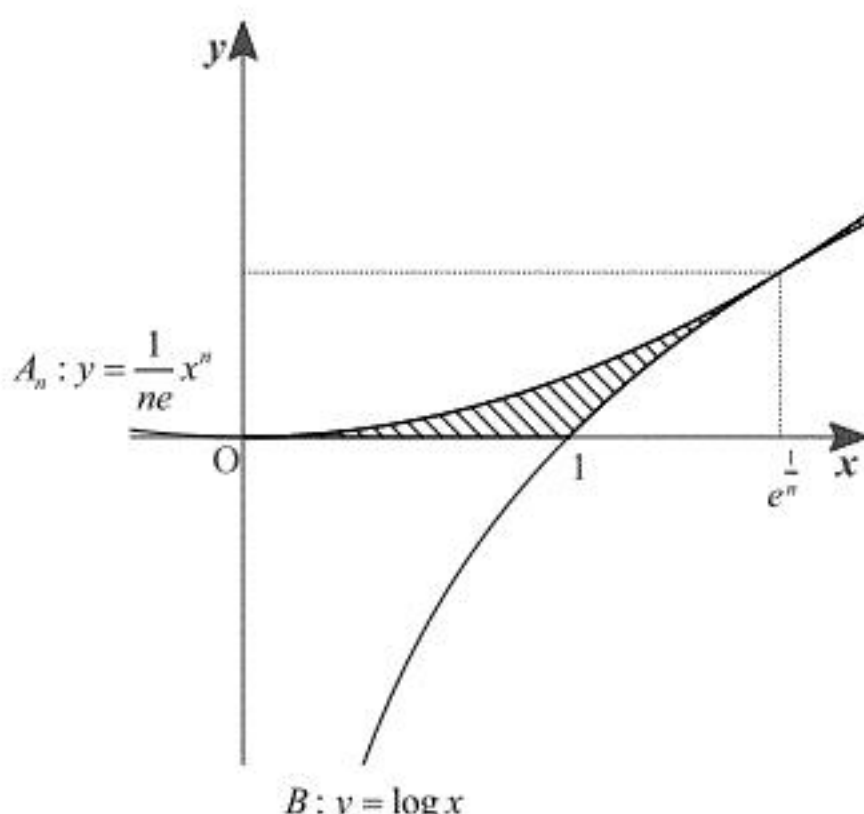
$$\therefore p_n = \frac{1}{ne}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{ne}, a_n = e^{\frac{1}{n}}$$

(2)

(1)より, 曲線 $A_n: y = \frac{1}{ne} x^n$, 曲線 $B: y = g(x) = \log x \ (x > 0)$ は共有点 $\left(e^{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n} \right)$ で共通の接線をもつから, A_n, B および x 軸で囲まれた図形は次図の斜線部である。



よって, この斜線部の面積 S_n は,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{e^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{ne} x^n dx - \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} \log x dx \\ &= \frac{1}{n(n+1)e} \left[x^{n+1} \right]_0^{e^{\frac{1}{n}}} - \left[x \log x \right]_1^{e^{\frac{1}{n}}} + \int_1^{e^{\frac{1}{n}}} 1 \cdot dx \\ &= \frac{1}{n(n+1)} e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{1}{n}} - 1 \\ &= \frac{n}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{n}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - 1$$

(3)

(2)の結果より,

$$n^2 S_n = \frac{n^3}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - n^2$$

と表せる。また, $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \leq e^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2n^2-1}{2n(n-1)} \ (n \geq 2)$ より

$$\frac{n^3}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) - n^2 \leq \frac{n^3}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - n^2 \leq \frac{n^3}{n+1} \cdot \frac{2n^2-1}{2n(n-1)} - n^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n(2n^2+2n+1)}{n+1} - n^2 \leq n^2 S_n \leq \frac{n^2}{2(n^2-1)}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq n^2 S_n \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)$$

となる。ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{2}$$

であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n = \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$