

令和2年度入学者選抜試験問題（数学）

1 次の問題文の空欄 ア から キ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

- (1) x^{2020} を $x^2 - x + 1$ で割った余りは ア である。
- (2) $\sqrt{2020}$ の整数部分を a 、小数部分を b とする。 $\frac{a-2}{2b}$ の整数部分は イ である。
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} =$ ウ である。
- (4) 媒介変数 t で表された曲線 $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$ 上の点 $(1, \sqrt{2})$ における接線の方程式は エ である。
- (5) 放物線 $y^2 + 3y - 5x + 1 = 0$ の焦点の座標は オ であり、準線の方程式は カ である。
- (6) 座標空間において、3点 $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(2, 0, 1)$ を通る平面を α とする。原点 $O(0, 0, 0)$ から α に垂線を引き、 α との交点を H とする。点 H の座標は キ である。

2 次の問題文の空欄 ク から サ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

- (1) 複素数平面上で、方程式 $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ の解を頂点とする四角形を S とする。また、複素数 α に対し方程式 $|z - \alpha| = 1$ を満たす点 z 全体を $C(\alpha)$ とする。 α が S の内部と周を動くとき、 $C(\alpha)$ が通過する領域の面積は ク である。
- (2) 自然数 k と正の実数 t に対し $f_{k,t}(x) = x^k e^{-\frac{x}{t}}$, $g_{k,t}(x) = \frac{x^{k+1}}{t^2} e^{-\frac{x}{t}}$ とおく。また、正の実数 M について

$$S_{k,t}(M) = \int_{\frac{1}{M}}^M f_{k,t}(x) dx, \quad I_{k,t}(M) = \int_{\frac{1}{M}}^M \frac{\{g_{k,t}(x)\}^2}{f_{k,t}(x)} dx$$

とおくとき、 $\lim_{M \rightarrow \infty} S_{3,2}(M) =$ ケ であり、 $\lim_{M \rightarrow \infty} I_{3,2}(M) =$ コ である。ただし、自然数 k に対し $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^k = 0$ である。

- (3) $(1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 21^\circ)(1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)(1 + \tan 24^\circ)(1 + \tan 25^\circ) =$ サ である。

3 下の表は、あるクラス 30 人が受けたテストの結果である。例えば、得点が 50 点の者は 5 人いる。クラス 30 人から n 人を選び、その得点の平均値を $M(n)$ とするとき、 $M(n) \geq 74$ となる確率を $p(n)$ とする。このとき、 $p(2)$ および $p(3)$ を求めよ。

得点	50	60	70	80	90	計
人数	5	5	10	5	5	30

4 a を実数とする。方程式 $x^2 - 2ax - |x| + a^2 = 0$ が、 $-1 < x < 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

5 a, b を実数とし、 $a > 0$ とする。 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax-b}}$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の増減、凹凸を調べ、変曲点および漸近線を求めよ。
- (2) 任意の実数 c に対して、等式 $\int_{-c-\frac{2b}{a}}^c f(x) dx = c + \frac{b}{a}$ が成り立つことを示せ。

6 n を 2 以上の自然数とする。 n 進法で表された整数の列

$$x_0 = 0_{(n)}, \quad x_1 = 1_{(n)}, \quad x_2 = 11_{(n)}, \quad x_3 = 111_{(n)}, \quad \dots, \quad x_k = \underbrace{111 \cdots 1}_{k \text{ 個}}_{(n)}, \quad \dots$$

を考える。 x_k ($k \geq 1$) は n 進法で k 桁の数である。以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 a, b に対して、 x_a を x_b で割った余りは $x_0, x_1, \dots, x_{b-1}$ のいずれかであることを証明せよ。
- (2) x_{3811} と x_{1073} の最大公約数を求めよ。

