

問題 1

(1)

まず、 $a > 0, b > 0$ かつ $a^2 + b^2 = 1$ より、 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ である。このとき、 $y = \log_a x$ は x に
 関して単調減少であるので、

$$\begin{aligned}\log_a b &> \log_a 1 = 0 \\ \therefore \log_a b &> 0\end{aligned}$$

である。この下で、等式 $\log_a b^2 = \log_b ab$ を変形すると、

$$\begin{aligned}\log_a b^2 &= \log_b ab \\ \Leftrightarrow 2 \log_a b &= \log_b a + 1 \\ \Leftrightarrow 2 \log_a b - \frac{1}{\log_a b} - 1 &= 0 \quad (\because \log_a b > 0) \\ \Leftrightarrow 2(\log_a b)^2 - \log_a b - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \log_a b + 1)(\log_a b - 1) &= 0\end{aligned}$$

となり、 $\log_a b > 0$ より

$$\begin{aligned}\log_a b &= 1 \\ \therefore a &= b\end{aligned}$$

を得る。これを $a^2 + b^2 = 1$ に代入して b を消去すると、

$$\begin{aligned}a^2 + a^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となり、 $a = b$ より、 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。したがって、求める実数 a, b は $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ であ
 る。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2)

自然数 n に対し、

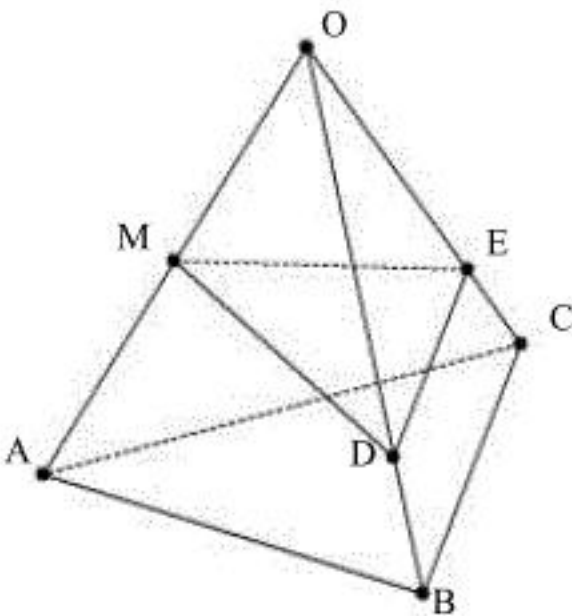
$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{(1+1)!} \right\} + \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{(2+1)!} \right\} + \left\{ \frac{1}{3!} - \frac{1}{(3+1)!} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

正四面体 OABC と各点を図示すると以下の通りである。



まず、正四面体の1辺の長さが2で、MがOAの中点、D、EがそれぞれOB、OCを3:1に内分す
 る点だから、

$$OM = 1, OD = OE = \frac{3}{2}$$

である。△ODEは正三角形であるので、 $DE = \frac{3}{2}$ である。また、 $\angle MOD = 60^\circ$ より、△MOD
 について余弦定理より、

$$\begin{aligned}MD^2 &= OM^2 + OD^2 - 2 \cdot OM \cdot OD \cdot \cos \angle MOD \\ &= 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{4} \\ \therefore MD &= \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

と分かる。さらに $MD = ME$ だから、 $ME = \frac{\sqrt{7}}{2}$ である。ここで、△MDEについて余弦定理
 より、

$$\begin{aligned}\cos \angle DME &= \frac{MD^2 + ME^2 - DE^2}{2 \cdot MD \cdot ME} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}} \\ &= \frac{5}{14}\end{aligned}$$

を得る。また、 $0^\circ < \angle DME < 180^\circ$ より、 $\sin \angle DME > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin \angle DME &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle DME} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{14}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{171}}{\sqrt{196}} \\ &= \frac{3\sqrt{19}}{14}\end{aligned}$$

である。したがって、△MDEの面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot MD \cdot ME \cdot \sin \angle DME &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{19}}{14} \\ &= \frac{3\sqrt{19}}{16}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{19}}{16}$$

問題 2

(1)

$$f(x) = 3x^2 + \int_0^2 xf(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 3x^2 + x \int_0^2 f(t)dt + \int_{-1}^1 f(t)dt$$

である。ここで、 $a = \int_0^2 f(t)dt$, $b = \int_{-1}^1 f(t)dt$ とおくと、 $f(x) = 3x^2 + ax + b$ となり、

$$a = \int_0^2 f(t)dt$$

$$= \int_0^2 (3t^2 + at + b)dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{1}{2}at^2 + bt \right]_0^2$$

$$= 8 + 2a + 2b$$

$$\therefore a + 2b + 8 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = \int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$= \int_{-1}^1 (3t^2 + at + b)dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{1}{2}at^2 + bt \right]_{-1}^1$$

$$= 2 + 2b$$

$$\therefore b = -2 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。①、②の連立方程式を解くと、 $a = -4$, $b = -2$ となるから、求める関数は

$f(x) = 3x^2 - 4x - 2$ である。

(答) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$

(2)

$g(x) = xf(x) + x$ より、

$$g(x) = x(3x^2 - 4x - 2) + x$$

$$= 3x^3 - 4x^2 - x$$

である。 $g(x)$ を微分すると、

$$g'(x) = 9x^2 - 8x - 1$$

$$= (9x + 1)(x - 1)$$

となる。 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ のとき、 $g'(x) = 0 \therefore x = -\frac{1}{9}, 1$ となるので、 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ における $g(x)$

の増減表は以下の通りである。

x	$-\frac{1}{2}$	$\dots$	$-\frac{1}{9}$	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{3}$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$\frac{14}{243}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$8\sqrt{3} - 12$

ここで、 $\frac{14}{243}$ と $8\sqrt{3} - 12$ の大小関係について、 $\frac{14}{243} < 1$ であり、

$$(8\sqrt{3} - 12) - 1 = 8\sqrt{3} - 13 > 0 \left(\because (8\sqrt{3})^2 = 192, 13^2 = 169 \right)$$

$$\therefore 8\sqrt{3} - 12 > 1$$

であるから、 $\frac{14}{243} < 8\sqrt{3} - 12$ である。したがって、上表より、 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ において $g(x)$ は、

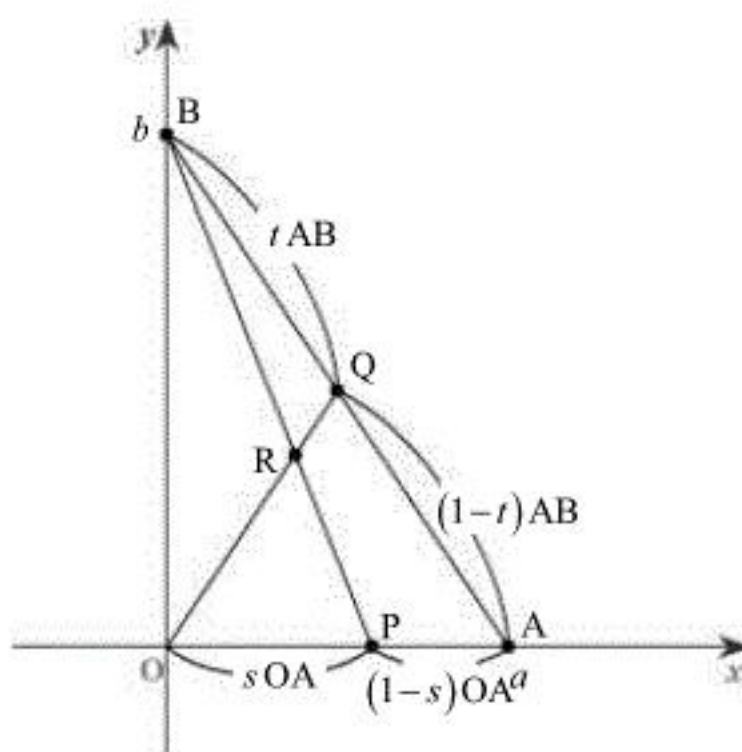
$x = \sqrt{3}$ のとき最大値 $8\sqrt{3} - 12$ 、 $x = 1$ のとき最小値 -2 をとる。

(答) 最大値： $8\sqrt{3} - 12$ 、最小値： -2

問題 3

(1)

座標平面上に点 A, B, P, Q, R を図示すると以下の通りである。



ここで、 $\overline{OR} = k\overline{OQ}$ より、 $OR : RQ = k : 1 - k$ ($0 < k < 1$) である。また、メネラウスの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{OR}{RQ} \cdot \frac{QB}{BA} \cdot \frac{AP}{PO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{k}{1-k} \cdot \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-s}{s} &= 1 \\ \Leftrightarrow k(t-st) &= s-ks \\ \Leftrightarrow k(s-st+t) &= s \\ \Leftrightarrow k &= \frac{s}{s-st+t} \end{aligned}$$

となる。

(答) $k = \frac{s}{s-st+t}$

(2)

R が線分 OP を直径とする円の円周上にあるとき、円周角の定理より $\angle ORP = 90^\circ$ となる。

すなわち直線 OQ と直線 BP が直交する。ここで、 $Q(at, b(1-t))$, $B(0, b)$, $P(as, 0)$ であるから、直線 OQ の傾きは $\frac{b(1-t)}{at}$ 、直線 BP の傾きは $-\frac{b}{as}$ である。したがって、直線 OQ と直線 BP が直交するとき、

$$\begin{aligned} \frac{b(1-t)}{at} \cdot \left(-\frac{b}{as}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{(1-t)b^2}{ta^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを(1)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} k &= \frac{s}{s-st+t} \\ &= \frac{\frac{(1-t)b^2}{ta^2}}{\frac{(1-t)b^2}{ta^2} - \frac{t(1-t)b^2}{ta^2} + t} \\ &= \frac{(1-t)b^2}{(1-t)b^2 - t(1-t)b^2 + t^2a^2} \\ &= \frac{(1-t)b^2}{t^2a^2 + (1-t)^2b^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$\overline{OR} = k\overline{OQ}$, $Q(at, b(1-t))$ より、 $R(akt, bk(1-t))$ である。また、 $\triangle OAB$ の重心 G の座標は、

$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ である。R と G が一致するとき、

$$\begin{aligned} \begin{cases} akt = \frac{a}{3} \\ bk(1-t) = \frac{b}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} kt = \frac{1}{3} \\ k(1-t) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (\because a > 0, b > 0) \\ \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $0 < k < 1$ を満たす。これを(2)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)b^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= \frac{\frac{1}{2}b^2}{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} &= 2 \\ \therefore \frac{a}{b} &= \sqrt{2} \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

となるから、求める値は $\sqrt{2}$ である。

(答) $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$