

問題 1

(1)

まず、 $a > 0, b > 0$ かつ $a^2 + b^2 = 1$ より、 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ である。このとき、 $y = \log_a x$ は x に関して単調減少であるので、

$$\begin{aligned}\log_a b &> \log_a 1 = 0 \\ \therefore \log_a b &> 0\end{aligned}$$

である。この下で、等式 $\log_a b^2 = \log_b ab$ を変形すると、

$$\begin{aligned}\log_a b^2 &= \log_b ab \\ \Leftrightarrow 2\log_a b &= \log_b a + 1 \\ \Leftrightarrow 2\log_a b - \frac{1}{\log_a b} - 1 &= 0 \quad (\because \log_a b > 0) \\ \Leftrightarrow 2(\log_a b)^2 - \log_a b - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\log_a b + 1)(\log_a b - 1) &= 0\end{aligned}$$

となり、 $\log_a b > 0$ より

$$\begin{aligned}\log_a b &= 1 \\ \therefore a &= b\end{aligned}$$

を得る。これを $a^2 + b^2 = 1$ に代入して b を消去すると、

$$\begin{aligned}a^2 + a^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

となり、 $a = b$ より、 $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。したがって、求める実数 a, b は $(a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2)

自然数 n に対し、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{(1+1)!} \right\} + \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{(2+1)!} \right\} + \left\{ \frac{1}{3!} - \frac{1}{(3+1)!} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

複素数平面上において、原点を中心とする円に内接する正三角形の頂点を反時計回りに $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ とすると、

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right), \gamma = \alpha \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \\ \Leftrightarrow \beta &= \alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right), \gamma = \alpha \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)\end{aligned}$$

と表される。また、 $\alpha \neq 0$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)} + \frac{1}{\alpha \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

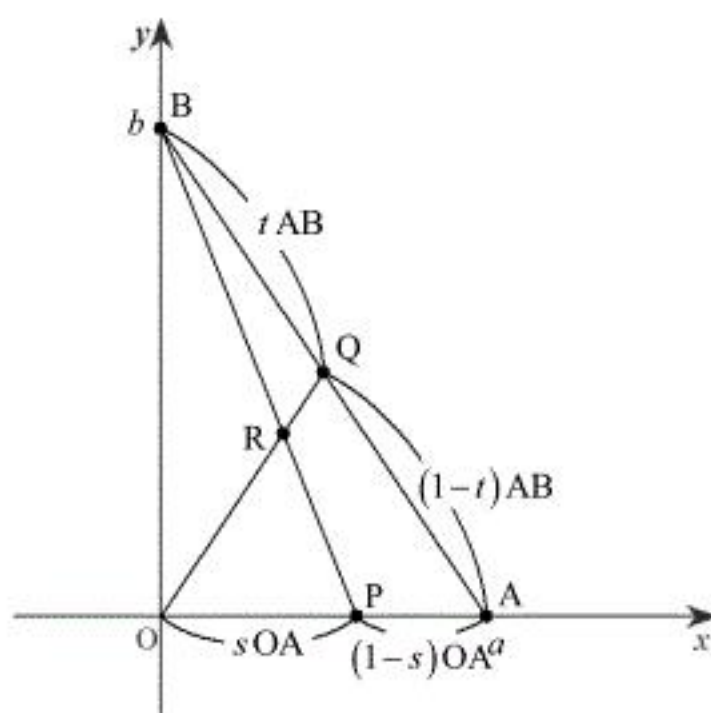
となる。したがって、 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

問題 2

(1)

座標平面上に点 A, B, P, Q, R を図示すると以下の通りである。



ここで、 $\overline{OR} = k\overline{OQ}$ より、 $OR : RQ = k : 1 - k$ ($0 < k < 1$) である。また、 $\triangle AOQ$ と直線 BP においてメネラウスの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{OR}{RQ} \cdot \frac{QB}{BA} \cdot \frac{AP}{PO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{k}{1-k} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1-s}{s} &= 1 \\ \Leftrightarrow k(t-st) &= s-ks \\ \Leftrightarrow k(s-st+t) &= s \\ \Leftrightarrow k &= \frac{s}{s-st+t} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad k = \frac{s}{s-st+t}$$

(2)

R が線分 OP を直径とする円の円周上にあるとき、円周角の定理より $\angle ORP = 90^\circ$ となる。

すなわち直線 OQ と直線 BP が直交する。ここで、 $Q(at, b(1-t))$, $B(0, b)$, $P(as, 0)$ であるから、直線 OQ の傾きは $\frac{b(1-t)}{at}$ 、直線 BP の傾きは $-\frac{b}{as}$ である。したがって、直線 OQ と直線 BP が直交するとき、

$$\begin{aligned} \frac{b(1-t)}{at} \cdot \left(-\frac{b}{as}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{(1-t)b^2}{ta^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを(1)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} k &= \frac{s}{s-st+t} \\ &= \frac{\frac{(1-t)b^2}{ta^2}}{\frac{(1-t)b^2}{ta^2} - \frac{t(1-t)b^2}{ta^2} + t} \\ &= \frac{(1-t)b^2}{(1-t)b^2 - t(1-t)b^2 + t^2a^2} \\ &= \frac{(1-t)b^2}{t^2a^2 + (1-t)^2b^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$\overline{OR} = k\overline{OQ}$, $Q(at, b(1-t))$ より、 $R(akt, bk(1-t))$ である。また、 $\triangle OAB$ の重心 G の座標は、

$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ である。R と G が一致するとき、

$$\begin{aligned} \begin{cases} akt = \frac{a}{3} \\ bk(1-t) = \frac{b}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} kt = \frac{1}{3} \\ k(1-t) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (\because a > 0, b > 0) \\ \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $0 < k < 1$ を満たす。これを(2)の結果に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)b^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2a^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= \frac{\frac{1}{2}b^2}{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} &= 2 \\ \therefore \frac{a}{b} &= \sqrt{2} \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

となるから、求める値は $\sqrt{2}$ である。

$$(答) \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

問題 3

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - \frac{2x-3}{x^2-3x+3} \\ &= \frac{2x^2-8x+9}{x^2-3x+3} \\ &= \frac{2(x-2)^2+1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

と変形される。よって、分子・分母ともに 0 より大きいと分かるから、すべての実数 x に対して、 $f(x) > 0$ である。

(証明終)

(2)

曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = k$, $x = k+1$ で囲まれる部分の面積 $S(k)$ は、(1) よりすべての実数 x に対して $f(x) > 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \int_k^{k+1} \left(2 - \frac{2x-3}{x^2-3x+3} \right) dx \\ &= \left[2x - \log(x^2-3x+3) \right]_k^{k+1} \\ &= \left[2(k+1) - \log\{(k+1)^2-3(k+1)+3\} \right] - \left[2k - \log(k^2-3k+3) \right] \\ &= 2 + \log \frac{k^2-3k+3}{k^2-k+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(k) = 2 + \log \frac{k^2-3k+3}{k^2-k+1}$$

(3)

$\log x$ は単調増加関数だから、

$$S(k) \text{ が最大となる} \Leftrightarrow \frac{k^2-3k+3}{k^2-k+1} \text{ が最大となる}$$

が成り立つ。また、 $\frac{k^2-3k+3}{k^2-k+1} = 1 - \frac{2k-2}{k^2-k+1}$ であるから、

$$\frac{k^2-3k+3}{k^2-k+1} \text{ が最大となる} \Leftrightarrow \frac{2k-2}{k^2-k+1} \text{ が最小となる}$$

が成り立つ。そこで、 $g(k) = \frac{2k-2}{k^2-k+1}$ とおき、 $g(k)$ が最小値をとるときの k の値を求める。

$g(k)$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(k) &= \frac{2(k^2-k+1) - (2k-2)(2k-1)}{(k^2-k+1)^2} \\ &= \frac{-2k^2+4k}{(k^2-k+1)^2} \\ &= \frac{-2k(k-2)}{(k^2-k+1)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} g'(k) &= 0 \\ \therefore k &= 0, 2 \end{aligned}$$

であるので、 $g(k)$ の増減表は以下の通りである。

k	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$g'(k)$		-	0	+	0	-	
$g(k)$	(0)	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	(0)

上表より、 $g(k)$ は $k=0$ で最小値 -2 をとる。したがって、 $S(k)$ は $k=0$ で最大値をとり、その値は、 $S(0) = 2 + \log 3$ である。

(答) $2 + \log 3$

問題 4

(1)

面積が A である正三角形の周の長さを L_3 とすると、この正三角形の一辺の長さは $\frac{L_3}{3}$ であるから、面積について

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L_3}{3}\right)^2\cdot\sin 60^{\circ}$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} A&=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L_3}{3}\right)^2\cdot\sin 60^{\circ} \\ \Leftrightarrow A&=\frac{L_3^2}{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow L_3^2&=12\sqrt{3}A \\ \therefore L_3&=2\sqrt{3\sqrt{3}A}\left(\because L_3>0\right) \end{aligned}$$

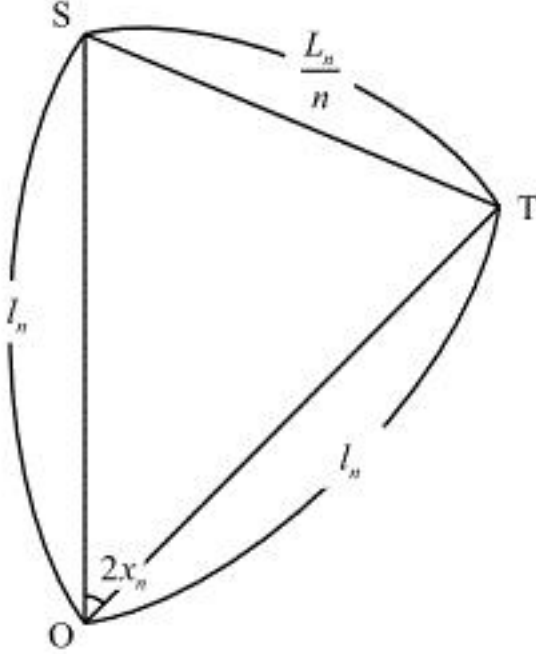
となる。

$$\text{(答)}\ L_3=2\sqrt{3\sqrt{3}A}$$

(2)

正 n 角形の中心を O 、正 n 角形のある隣り合う頂点をそれぞれ S 、 T とする。このとき、

$\angle\text{SOT}=\frac{2\pi}{n}=2x_n$ と表される。また、 $OS=OT=l_n$ とする。このとき、 $\triangle\text{OST}$ を図示すると、以下の通りである。



まず、 ST について余弦定理より、

$$\begin{aligned} ST^2&=OS^2+OT^2-2\cdot OS\cdot OT\cdot\cos\angle\text{SOT} \\ \Leftrightarrow\left(\frac{L_n}{n}\right)^2&=l_n^2+l_n^2-2l_n\cdot l_n\cos 2x_n \\ \Leftrightarrow\left(\frac{L_n}{n}\right)^2&=2l_n^2(1-\cos 2x_n) \\ \Leftrightarrow\left(\frac{L_n}{n}\right)^2&=4l_n^2\sin^2 x_n \\ \Leftrightarrow l_n^2&=\frac{L_n^2}{4n^2\sin^2 x_n}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。次いで、 $\triangle\text{OST}$ の面積について、

$$\frac{A}{n}=\frac{1}{2}\cdot l_n^2\cdot\sin 2x_n\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{A}{n}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{L_n^2}{4n^2\sin^2 x_n}\cdot\sin 2x_n \\ \Leftrightarrow\frac{A}{n}&=\frac{L_n^2\cos x_n}{4n^2\sin x_n}\left(\because\sin 2x_n=2\sin x_n\cos x_n\right) \\ \Leftrightarrow L_n^2&=4An\tan x_n \\ \therefore L_n&=2\sqrt{An\tan x_n}\left(\because L_n>0\right) \end{aligned}$$

となる。また、 $x_n=\frac{\pi}{n}\Leftrightarrow n=\frac{\pi}{x_n}$ を用いて、 n を消去すると、

$$L_n=2\sqrt{A\pi\frac{\tan x_n}{x_n}}$$

となる。

$$\text{(答)}\ L_n=2\sqrt{A\pi\frac{\tan x_n}{x_n}}$$

(3)

$$f(x)=\frac{\tan x}{x}\left(0<x\leq\frac{\pi}{3}\right)\text{より、}$$

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2} \\ &=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} \\ &=\frac{x-\sin x\cos x}{(x\cos x)^2} \\ &=\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{(x\cos x)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0<x\leq\frac{\pi}{3}$ を考慮すると、 $f'(x)$ の分母は0より大きいので、 $f'(x)$ の正負は

$f'(x)$ の分子の正負に一致する。そこで、 $g(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x$ とおくと、

$$g'(x)=1-\cos 2x\geq 0$$

であるから、 $g(x)$ は単調増加関数である。これと、 $g(0)=0$ より、 $0<x\leq\frac{\pi}{3}$ において

$g(x)>0$ が成り立つ。したがって、 $0<x\leq\frac{\pi}{3}$ において $f'(x)>0$ である。また、 $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow 0}f(x)&=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\tan x}{x} \\ &=\lim_{x\rightarrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) \\ &=1 \end{aligned}$$

であるから、 $0<x\leq\frac{\pi}{3}$ における $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	(1)	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

上表より、 $f(x)$ のとり得る範囲は $1<f(x)\leq\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ である。

$$\text{(答)}\ f(x)\text{の増減：前表、とり得る値の範囲：}1<f(x)\leq\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

(4)

(2)より、 $L_n=2\sqrt{A\pi\frac{\tan x_n}{x_n}}$ であり、これを $f(x)$ を用いて表すと、 $L_n=2\sqrt{A\pi f(x_n)}$ となる。こ

こで $n\geq 3$ より、 $x_n=\frac{\pi}{n}$ のとり得る値の範囲は $0<x_n\leq\frac{\pi}{3}$ であるから、(3)より、 L_n のとり得る

値の範囲は、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{A\pi\cdot 1}<L_n\leq 2\sqrt{A\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{A\pi}<L_n\leq 2\sqrt{3\sqrt{3}A}\qquad\cdots\cdots\textcircled{3} \end{aligned}$$

である。ここで、 n を無限大に近づけると、面積 A 、周の長さが L の円に近づく。この円の半径を r とすると、円の円周の長さと同面積について

$$L=2\pi r,\ A=\pi r^2$$

が成り立つから、これより r を消去すると、

$$L=2\sqrt{A\pi}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$

となる。 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より、数列 $L_3, L_4, L_5, \cdots, L_n, \cdots$ について、値が最大の項は $L_3=2\sqrt{3\sqrt{3}A}$ であり、最小の項は $L=2\sqrt{A\pi}$ である。

$$\text{(答)}\ \text{最大の項: }L_3=2\sqrt{3\sqrt{3}A},\ \text{最小の項: }L=2\sqrt{A\pi}$$