

問題 1

(1)

6以上の3の倍数のうちで、3で割った商を素因数分解したとき、2以外の素因数をもたないものは、 n を自然数として $3 \cdot 2^n$ と表せる。また $3 \cdot 2^9 = 1536 < 2022 < 3072 = 3 \cdot 2^{10}$ であるから、求める和は

$$\sum_{k=1}^9 3 \cdot 2^k = \frac{6 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 3066$$

である。

(答) 3066

(2)

$$\log_2 |x^2 - 3x + 2| + \log_2 |x^2 - 5x + 6| = 2 \log_2 (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 |(x-1)(x-2)| + \log_2 |(x-2)(x-3)| = 2 \log_2 (x-2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。真数条件より、

$$(x-1)(x-2) \neq 0, (x-2)(x-3) \neq 0, x-2 > 0$$

$$\therefore 2 < x < 3, x > 3$$

である。場合分けして考える。

[1] $2 < x < 3$ のとき

このとき $x^2 - 3x + 2 > 0$, $x^2 - 5x + 6 < 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$\log_2 (x-1)(x-2) + \log_2 \{-(x-2)(x-3)\} = 2 \log_2 (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \{-(x-1)(x-2)^2(x-3)\} = \log_2 (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)(x-2)^2(x-3) = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^4 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

となるが、 $2 < x < 3$ であるため不適である。

[2] $x > 3$ のとき

このとき $x^2 - 3x + 2 > 0$, $x^2 - 5x + 6 > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$\log_2 (x-1)(x-2) + \log_2 (x-2)(x-3) = 2 \log_2 (x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x-1)(x-2)^2(x-3) = \log_2 (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2(x-3) = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 - 4x + 2) = 0$$

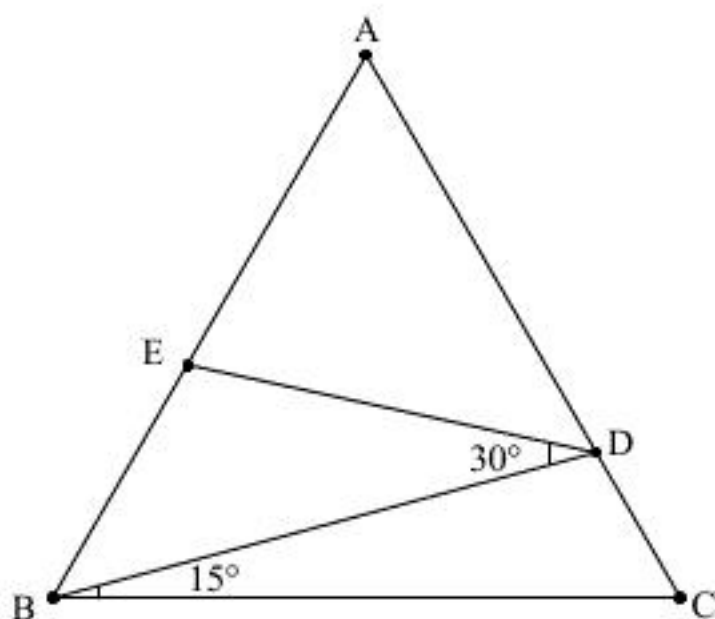
$$\therefore x = 2 + \sqrt{2} \quad (x > 3)$$

となる。

[1], [2]より、求める解は $x = 2 + \sqrt{2}$ である。

(答) $2 + \sqrt{2}$

(3)



$\triangle ABC$ は正三角形であるから、 $\angle ABC = 60^\circ$ である。よって $\angle EBD = \angle EBC - \angle DBC = 45^\circ$ である。このとき $\angle BED = 180^\circ - \angle BDE - \angle EBD = 105^\circ$ であるから、 $\triangle BDE$ において正弦定理より

$$\frac{DE}{\sin \angle EBD} = \frac{BD}{\sin \angle BED}$$

である。よって

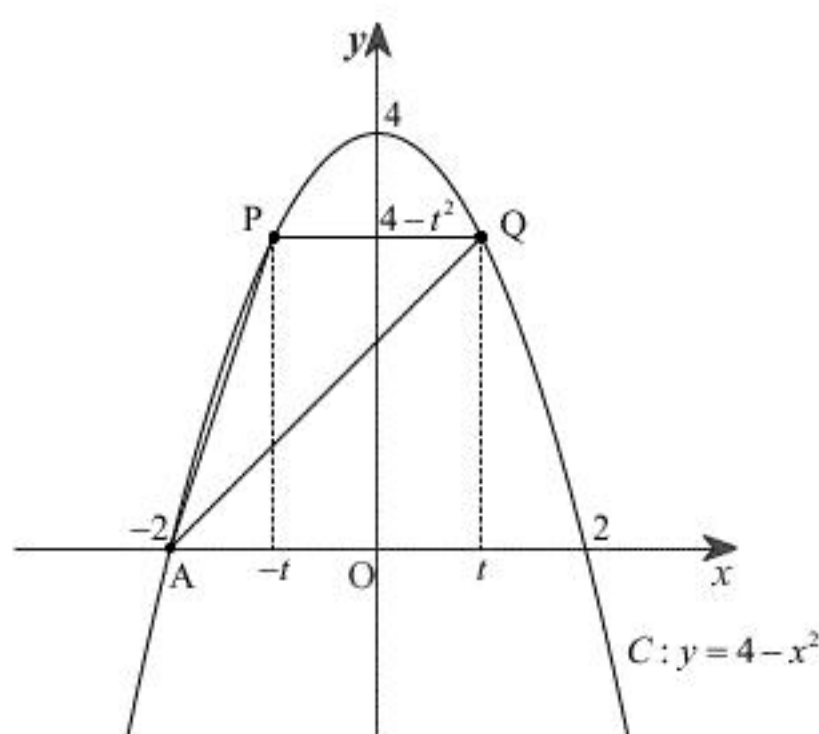
$$\begin{aligned} \frac{DE}{BD} &= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin(45^\circ + 60^\circ)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{3} - 1$

問題 2

(1)



放物線 C の方程式 $y = 4 - x^2$ において、 $y = 0$ のとき $x = \pm 2$ である。よって点 A の座標は $(-2, 0)$ である。 $\triangle APQ$ の面積を $S(t)$ ($0 < t < 2$) とすると、

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot (4 - t^2) \\ = -t^3 + 4t$$

$$S'(t) = -3t^2 + 4$$

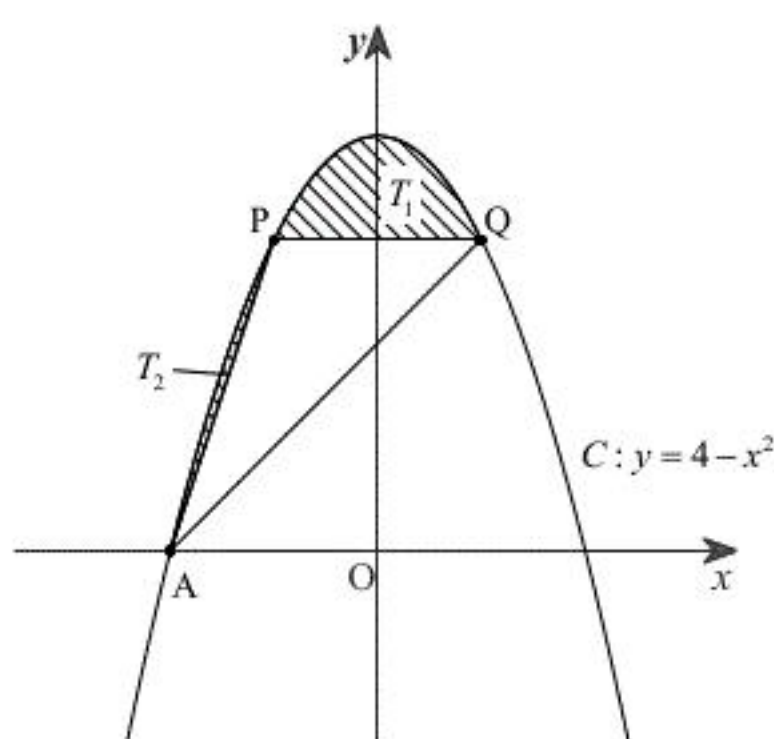
である。よって $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	2
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	

したがって $\triangle APQ$ の面積 $S(t)$ が最大となるとき $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ であり、そのときの最大値は $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ である。

(答) t の値: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 最大値: $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

(2)



T_1, T_2 は、それぞれ上図に示した部分の面積である。直線 AP の方程式は

$$y = \frac{4 - t^2 - 0}{-t - (-2)}(x + 2) \\ \therefore y = (t + 2)x + 2t + 4$$

であるから、 T_1, T_2 はそれぞれ

$$T_1 = \int_{-t}^t \left\{ (4 - x^2) - (4 - t^2) \right\} dx \\ = -\int_{-t}^t (x + t)(x - t) dt \\ = \frac{1}{6} \left\{ t - (-t) \right\}^3 \\ = \frac{4}{3} t^3$$

$$T_2 = \int_{-2}^{-t} \left[(4 - x^2) - \{(t + 2)x + 2t + 4\} \right] dx \\ = -\int_{-2}^{-t} (x + 2)(x + t) dt \\ = \frac{1}{6} \left\{ (-t) - (-2) \right\}^3 \\ = -\frac{t^3}{6} + t^2 - 2t + \frac{4}{3}$$

である。よって

$$T = T_1 + 2T_2 \\ = t^3 + 2t^2 - 4t + \frac{8}{3}$$

である。 $f(t) = t^3 + 2t^2 - 4t + \frac{8}{3}$ ($0 < t < 2$) とおくと、

$$f'(t) = 3t^2 + 4t - 4 \\ = (3t - 2)(t + 2)$$

であるから、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		↘	$\frac{32}{27}$	↗	

したがって T が最小となるとき $t = \frac{2}{3}$ であり、そのときの最小値は $\frac{32}{27}$ である。

(答) t の値: $\frac{2}{3}$, 最小値: $\frac{32}{27}$

問題 3

(1)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_2} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \\ &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \\ &= \left(\frac{2}{3}, 0 \right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_3} &= \frac{3}{2} \overrightarrow{OC} \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{e_3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(2)

$|\overrightarrow{OA}|=1$ より, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OA} = (1, 0)$ である。3点 P, Q, R が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{PR} = v\overrightarrow{PQ}$ (v は実数) とおける。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= v\overrightarrow{PQ} \\ \Leftrightarrow u\overrightarrow{e_3} - s\overrightarrow{e_1} &= v(t\overrightarrow{e_2} - s\overrightarrow{e_1}) \\ \Leftrightarrow \left(-s + \frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u \right) &= \left(-vs - \frac{1}{2}vt, \frac{\sqrt{3}}{2}vt \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s - \frac{1}{2}vt = vs + \frac{1}{2}vt \\ u = vt \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{s}{s+t} (\because s, t > 0) \\ u = vt \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{s}{s+t} \\ u = \frac{st}{s+t} \end{cases} \end{aligned}$$

である。よって $u = \frac{st}{s+t}$ である。

$$(答) \quad u = \frac{st}{s+t}$$

(3)

点 R が線分 PQ の中点であるとき, $v = \frac{1}{2}$ である。このとき

$$\begin{aligned} \frac{s}{s+t} &= \frac{1}{2} \\ \therefore t &= s \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} u &= \frac{st}{s+t} \\ &= \frac{s^2}{2s} \\ &= \frac{s}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad t = s, u = \frac{s}{2}$$