

I

(1)

真数条件より

$$\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| > 0 \\ |x^2 - 5x + 6| > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1||x-2| > 0 \\ |x-2||x-3| > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$
$$\therefore 2 < x < 3, 3 < x$$

である。ここで、与えられた方程式は

$$\begin{aligned} \log_2 |x^2 - 3x + 2| + \log_2 |x^2 - 5x + 6| &= 2 \log_2 (x - 2) \\ \Leftrightarrow \log_2 (x-1)(x-2)^2 |x-3| - \log_2 (x-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 (x-1)|x-3| &= 0 \\ \therefore (x-1)|x-3| &= 1 \end{aligned}$$

と変形できる。以下、 $x-3$ の正負によって場合分けする。

[1] $x-3 > 0$, すなわち $x > 3$ のとき

$$\begin{aligned} (x-1)|x-3| &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-3) &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ \therefore x &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、このうち $x > 3$ を満たすのは $x = 2 + \sqrt{2}$ である。

[2] $x-3 < 0$, すなわち $2 < x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} (x-1)|x-3| &= 1 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-3) &= -1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

となるが、これは $2 < x < 3$ を満たさないため不適である。

以上、[1], [2]より、求める解は $x = 2 + \sqrt{2}$ である。

(答) $x = 2 + \sqrt{2}$

(2)

$z \neq 2, w \neq 1$ より、

$$\begin{aligned} w &= \frac{z+2}{z-2} \\ \Leftrightarrow w-1 &= \frac{4}{z-2} \\ \Leftrightarrow z-2 &= \frac{4}{w-1} \\ \therefore z &= \frac{2w+2}{w-1} \end{aligned}$$

と表される。ここで、 z は $|z|=2$ を満たすため、

$$\begin{aligned} \left| \frac{2w+2}{w-1} \right| &= 2 \\ \Leftrightarrow |w+1| &= |w-1| \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、点 w は2点 $-1, 1$ からの距離が等しい点であるため、求める図形は2点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。

(答) 2点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(3)

$t = \sin^2 x + 1$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= 2 \sin x \cos x \\ &= \sin 2x \end{aligned}$$

であり、

x	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{3}{4}\pi$
t	2	$\rightarrow$	$\frac{3}{2}$

となるため、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{\sin^2 x + 1} \sin 2x dx &= \int_2^{\frac{3}{2}} \sqrt{t} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_2^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(1)

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。また、点Cは線分ABを1:2に内分する点であるため、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\text{となる。したがって、} |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \overrightarrow{e_3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(2)

$\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ である。3点P, Q, Rが同一直線上にあるとき、 $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$ を満たす実数 k が存在する。これを变形すると

$$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$$

$$\Leftrightarrow t\overrightarrow{e_2} - s\overrightarrow{e_1} = k(u\overrightarrow{e_3} - s\overrightarrow{e_1})$$

$$\therefore \left(-s - \frac{1}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = k \left(-s + \frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u \right)$$

となるため、各成分を比較して

$$\begin{cases} -s - \frac{1}{2}t = k \left(-s + \frac{1}{2}u \right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{2}ku \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s + \frac{1}{2}t = \frac{st}{u} - \frac{1}{2}t \\ k = \frac{t}{u} \quad (\because u > 0) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u = \frac{st}{s+t} \quad (\because s+t > 0) \\ k = \frac{t}{u} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad u = \frac{st}{s+t}$$

(3)

点Rが線分PQの midpoint であるとき、 $k=2$ となるため、(2)より

$$\begin{cases} u = \frac{st}{s+t} \\ 2 = \frac{t}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2}(s+t) = st \\ u = \frac{t}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} t = s \quad (\because t > 0) \\ u = \frac{s}{2} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = s, u = \frac{s}{2}$$

(1)

 $f(x) = xe^{-x}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

より, 点 $(t, f(t))$ (t は実数) における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= (1-t)e^{-t}(x-t) + te^{-t} \\ \therefore y &= (1-t)e^{-t}x + t^2e^{-t} \end{aligned}$$

となる。これが点 $(4, 0)$ を通るとき,

$$\begin{aligned} 0 &= 4(1-t)e^{-t} + t^2e^{-t} \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 &= 0 \quad (\because e^{-t} > 0) \\ \therefore t &= 2 \end{aligned}$$

であり, その接線の方程式は $y = -e^{-2}x + 4e^{-2}$ である。(答) $y = -e^{-2}x + 4e^{-2}$

(2)

C の接線で, 点 $(a, 0)$ を通るものが存在しないとき, $a(1-t)e^{-t} + t^2e^{-t} = 0$ は実数解をもたない。 $e^{-t} > 0$ よりすなわち, $t^2 - at + a = 0$ は実数解をもたず, t についての2次方程式 $t^2 - at + a = 0$ の判別式を D とすると $D < 0$ が成り立つ。したがって, 求める a の値の範囲は

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a &< 0 \\ \therefore 0 &< a < 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $0 < a < 4$

(3)

(2)より, $t^2 - at + a = 0$ を満たす実数 t について, 点 $(t, f(t))$ における C の接線は点 $(a, 0)$ を通る。したがって, t についての2次方程式 $t^2 - at + a = 0$ の実数解が $1 < t < 2$ の範囲に少なくとも1つ存在することを示す。 $g(t) = t^2 - at + a$ ($a > 4$) とおくと, $g(t)$ は $1 \leq t \leq 2$ において連続であり,

$$\begin{cases} g(1) = 1 > 0 \\ g(2) = 4 - a < 0 \quad (\because a > 4) \end{cases}$$

であるため, 中間値の定理より方程式 $g(t) = 0$ は $1 < t < 2$ を満たす解をもつ。よって, $t^2 - at + a = 0$ の実数解が $1 < t < 2$ の範囲に存在し, 題意は示された。

(証明終)

4

(1)

$$I_n = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \log I_n &= \log \left(\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdots \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \right) \\ &= \log \frac{2n+1}{2n} + \log \frac{2n-1}{2n-2} + \cdots + \log \frac{5}{4} + \log \frac{3}{2} \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{2n} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{2n-2} \right) + \cdots + \log \left(1 + \frac{1}{4} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= f(n) + f(n-1) + \cdots + f(2) + f(1) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$x > 0$ において $1 + \frac{1}{2x} > 1$ より, $f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right) > \log 1 = 0$ である。また, 関数 $1 + \frac{1}{2x}$ は単調に減少するため関数 $f(x)$ は単調に減少する。

(答) $f(x) > 0$, 単調に減少する

$f(x)$ は単調に減少するため, $k \leq x \leq k+1$ において $f(x) \leq f(k)$ が成り立ち, 等号成立は $x=k$ のときのみであるから,

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x) dx &< \int_k^{k+1} f(k) dx \\ &\Leftrightarrow \int_k^{k+1} f(x) dx < f(k) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(1)および(2)の結果より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx &< \sum_{k=1}^n f(k) \\ \Leftrightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx + \int_{n-1}^n f(x) dx + \cdots + \int_1^2 f(x) dx &< f(n) + f(n-1) + \cdots + f(2) + f(1) \\ \therefore \int_1^{n+1} f(x) dx &< \log I_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

部分積分法より,

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x) dx &= \int_1^n \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right) dx \\ &= \left[x \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{1}{2x}} dx \\ &= \left[x \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right]_1^n + \int_1^n \frac{1}{2x+1} dx \\ &= \left[x \log \left(1 + \frac{1}{2x} \right) + \frac{1}{2} \log(2x+1) \right]_1^n \\ &= n \log \left(1 + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2} \log(2n+1) - \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad n \log \left(1 + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2} \log(2n+1) - \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 3$$

(5)

(4)の結果より,

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} f(x) dx &= (n+1) \log \left\{ 1 + \frac{1}{2(n+1)} \right\} + \frac{1}{2} \log(2n+3) - \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 3 \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^{n+1} + \log \sqrt{2n+3} + \log \frac{2}{3} - \log \sqrt{3} \\ &= \log \frac{2}{3} \sqrt{2n+3} \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^{n+1} - \log \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。これを(3)の結果に用いると,

$$\begin{aligned} \log \frac{2}{3} \sqrt{2n+3} \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^{n+1} - \log \sqrt{3} &< \log I_n \\ \Leftrightarrow \log \sqrt{3} I_n &> \log \frac{2}{3} \sqrt{2n+3} \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} I_n &> \frac{2}{3} \sqrt{2n+3} \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)