

1

(1)

n 年後価格は $(0.96)^n$ 倍となり、これが 0.5 より小さくなる条件は

$$\begin{aligned}(0.96)^n &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow n \log_{10} 0.96 &< -\log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{-\log_{10} 2}{\log_{10} 3 + 5 \log_{10} 2 - 2} \\ \Leftrightarrow n &> 16.8\end{aligned}$$

となる。したがって、求める最小の n は 17 となる。

(答) 17 年後

(2)

数学的帰納法を利用して、 n を自然数とすると $\sum_{k=1}^n (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

左辺は $(1-1) \left(\frac{1}{2}\right) = 0$ となり、右辺も $1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ となるから $n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n=m$ のとき

m を 2 以上の自然数として $n=m-1$ のとき $\sum_{k=1}^{m-1} (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k &= (m-1) \left(\frac{1}{2}\right)^m + 1 - m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\ &= 1 + (m-1-2m) \left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &= 1 - (m+1) \left(\frac{1}{2}\right)^m\end{aligned}$$

となり $n=m$ のときも成り立つ。

以上、[1], [2] より数学的帰納法から題意は示された。

(証明終)

(3)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(t) dt$ は定数より、 k を定数として $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(t) dt = k$ とおくと $f(x) = \sin 2x + k$ となる。ここで、 k を計算すると

$$\begin{aligned}k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t (\sin 2t + k) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} k t dt \\ &= \left[-\frac{t}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} k t^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8} k\end{aligned}$$

となり、

$$k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8} k \Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{8 - \pi^2}$$

となる。したがって、求める $f(x)$ は $f(x) = \sin 2x + \frac{2\pi}{8 - \pi^2}$ となる。

(答) $f(x) = \sin 2x + \frac{2\pi}{8 - \pi^2}$

(1)

$a_{n+1} = 6a_n^6$ かつ初項が正より、すべての n において $a_n > 0$ がわかる。したがって、 $a_{n+1} = 6a_n^6$ は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6a_n^6 \\ \Leftrightarrow \log_6 a_{n+1} &= \log_6 6a_n^6 \\ \Leftrightarrow \log_6 a_{n+1} &= 1 + 6\log_6 a_n \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= 6b_n + 1 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 6b_n + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + \frac{1}{5} &= 6\left(b_n + \frac{1}{5}\right) \\ \therefore b_n + \frac{1}{5} &= \left(b_1 + \frac{1}{5}\right) \cdot 6^{n-1} \end{aligned}$$

となるから、 $b_1 = \log_6 36 = 2$ より、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \frac{1}{5}(11 \cdot 6^{n-1} - 1)$ である。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= \log_6 a_n \\ \therefore a_n &= 6^{b_n} \end{aligned}$$

より $a_n = 6^{\frac{1}{5}(11 \cdot 6^{n-1} - 1)}$ となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 6^{\frac{1}{5}(11 \cdot 6^{n-1} - \frac{1}{5})}, b_n = \frac{1}{5}\left(11 \cdot 6^{n-1} - \frac{1}{5}\right)$$

(2)

c_n の漸化式 $c_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}c_n + 1$ の両辺を $\frac{1}{(n+2)(n+3)}$ で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+2)(n+3)}c_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)}c_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \Leftrightarrow d_{n+1} &= d_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \Leftrightarrow d_{n+1} - d_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (d_{k+1} - d_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ \Leftrightarrow d_n - d_1 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} \\ \therefore d_n &= \frac{4n+5}{3(n+2)} \left(\because d_1 = \frac{6}{(1+1) \cdot (1+2)} = 1 \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、上式の右辺に $n=1$ を代入すると $\frac{4+5}{3 \cdot (1+2)} = 1$ となるから、上式は $n=1$ でも

成り立ち、数列 $\{d_n\}$ の一般項は $d_n = \frac{4n+5}{3(n+2)}$ となる。さらに、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = \frac{(n+1)(4n+5)}{3} \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad c_n = \frac{(n+1)(4n+5)}{3}, d_n = \frac{4n+5}{3(n+2)}$$

3

(1)

$x \neq 0$ のとき、 $f(x) = \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

(2)

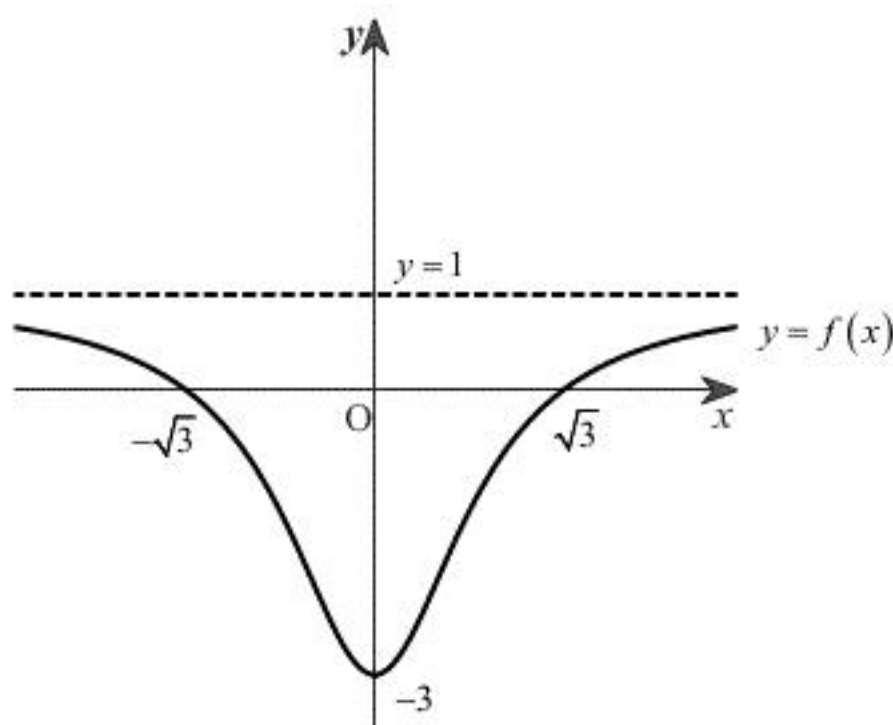
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{8x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8(x^2 + 1)^2 - 8x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{8(1 + \sqrt{3}x)(1 - \sqrt{3}x)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

である。よって、 $f(x)$ の増減表は $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2$ より下表のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$		-2		-3		-2	

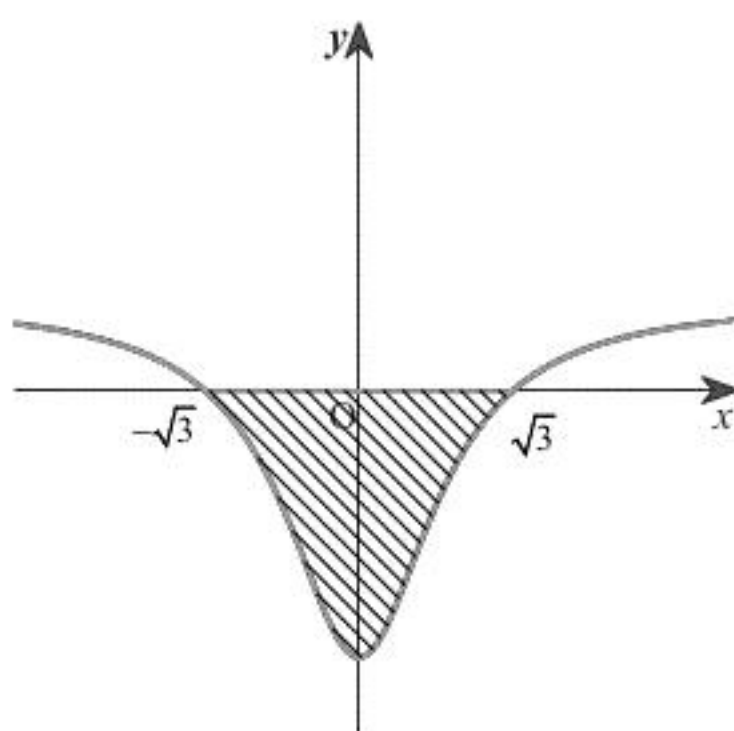
極値は、 $x = 0$ のとき極小値 -3 であり、変曲点は $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -2\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -2\right)$ である。また、(1) より $x \rightarrow \pm\infty$ では $y = 1$ に漸近するからグラフの概形は以下のようになる。



(答) 上図

(3)

曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は下図の斜線部分の面積である。



上図より求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(0 - \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}\right) dx &= -2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} dx \\ &= -2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{4}{x^2 + 1}\right) dx \\ &= -2\sqrt{3} + 8 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ を $x = \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ と置換して計算する。 $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

であり、 θ の範囲は

x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

となる。したがって、 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積は $2\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$ となる。

(答) $2\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

4

(1)

 x, y を t について微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \omega - \gamma\omega \cos \omega t \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\omega \sin \omega t \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\gamma \sin \omega t}{1 - \gamma \cos \omega t} \end{aligned}$$

となる。また、 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ のときの x, y の座標と $\frac{dy}{dx}$ は、 $\sin \omega t = 1, \cos \omega t = 0$ より

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} - \gamma \\ y &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \gamma \end{aligned}$$

となる。よって、求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - 1 &= \gamma \left(x - \frac{\pi}{2} + \gamma \right) \\ \Leftrightarrow y &= \gamma x - \frac{\pi}{2} \gamma + \gamma^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \gamma x - \frac{\pi}{2} \gamma + \gamma^2 + 1$$

(2)

 $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, |\vec{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ であるから①, ②より $|\vec{v}|$ は

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(\omega - \gamma\omega \cos \omega t)^2 + (\gamma\omega \sin \omega t)^2} \\ &= \omega \sqrt{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \omega t} \end{aligned}$$

となる。また、①, ②より $\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\omega^2 \sin \omega t, \frac{d^2y}{dt^2} = \gamma\omega^2 \cos \omega t$ であるから、 $|\vec{\alpha}|$ は

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}| &= \sqrt{\gamma^2 \omega^4 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\ &= \omega^2 \gamma \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{v}| = \omega \sqrt{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \omega t}, |\vec{\alpha}| = \omega^2 \gamma$$

(3)

(2)より、 $\cos \omega t = -1$ のとき $|\vec{v}|$ は最大となり、その値は

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \omega \sqrt{1 + \gamma^2 + 2\gamma} \\ &= (\gamma + 1)\omega \quad (\because \gamma > 0) \end{aligned}$$

となる。また、 $\cos \omega t = -1$ となる t は、 n を整数として

$$\begin{aligned} \omega t &= (2n - 1)\pi \\ \Leftrightarrow t &= \frac{(2n - 1)\pi}{\omega} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{時刻 } t = \frac{(2n - 1)\pi}{\omega} \quad (n \text{ は整数}) \text{ のとき、最大値 } (\gamma + 1)\omega$$

(4)

求める道のり L は、 $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\vec{v}| dt$ である。また、 $\gamma = 1$ のとき $|\vec{v}|$ は

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \omega \sqrt{2 - 2\cos \omega t} \\ &= 2\omega \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right| \end{aligned}$$

となる。以上より求める道のり L は $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$ では $\sin \frac{\omega t}{2} \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2\omega \sin \frac{\omega t}{2} dt \\ &= 2\omega \left[-\frac{2}{\omega} \cos \frac{\omega t}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

(答) 8