

1

(1)

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ であるため、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + 3 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 6 &= \frac{1}{2}(a_n - 6) \\ \Leftrightarrow a_n - 6 &= (2 - 6) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

である。したがって、 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} \right\} \\ &= 6n - 4 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 6n - 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 6 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \right\} = 6$$

である。

$$(答) \quad S_n = 6n - 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 6$$

(2)

求める定積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

である。ここで、 $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ とすると、 $dx = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos^2 \theta} d\theta$ であり、積分区間は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

したがって、求める定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{3}{4} \tan^2 \theta + \frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

(3)

1つ目に取り出した玉が赤である事象を X 、1つ目に選んだ箱が A、B である事象をそれぞれ A, B とする。2つの箱からどれか1つが選ばれる確率は等しいとすると、

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

である。また、A、B の箱から赤玉を取り出す確率はそれぞれ $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ である。このとき、1つ目

に取り出した玉が赤であったとき、1つ目に選んだ箱が A であった条件付き確率 $P(A|X)$ は

$$\begin{aligned} P(A|X) &= \frac{P(A \cap X)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{4}{5}P(A)}{\frac{4}{5}P(A) + \frac{3}{5}P(B)} \\ &= \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

となる。また、 $P(B|X)$ は $P(B|X) = 1 - P(A|X) = \frac{3}{7}$ である。ここで求める確率は、条件付き

確率 $P(A|X), P(B|X)$ を用いて

$$\frac{3}{5}P(A|X) + \frac{4}{5}P(B|X)$$

と表せる。よって、求める確率は

$$\frac{3}{5}P(A|X) + \frac{4}{5}P(B|X) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{24}{35}$$

である。

$$(答) \quad \frac{24}{35}$$

(1)

問題文から、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2$ である。また、

$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$ である。点 F は線分 AE と線分 CD の交点であるから、実数 k, l

を用いて次のように 2 通りで表せる。

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AE} = (1-k)\vec{a} + \frac{1}{4}k\vec{b} + \frac{3}{4}k\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + l\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}l\vec{a} + \frac{1}{3}l\vec{b} + (1-l)\vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、2 つの式を比較すると、

$$\begin{cases} 1-k = \frac{2}{3}l \\ \frac{1}{4}k = \frac{1}{3}l \\ \frac{3}{4}k = 1-l \end{cases}$$

である。これを解くと、 $k = \frac{2}{3}, l = \frac{1}{2}$ である。したがって $\overrightarrow{OF}$ は

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。また、このとき、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OF}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{36}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2 + \frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OF}| = \frac{5}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, |\overrightarrow{OF}| = \frac{5}{3}$$

(2)

$\triangle OAF$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OF}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF})^2}$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF} &= \vec{a} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OF}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \frac{25}{9} - \frac{64}{9}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 1$$

(3)

点 P, Q はそれぞれ辺 OB, OC 上にあるから、 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = s\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = t\vec{c}$$

と表せる。また、 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$ であるから、 $\overrightarrow{OG}$ は

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{3} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}$$

である。また、点 G は線分 OF 上にあるから、 $\overrightarrow{OG}$ は実数 u を用いて

$$\overrightarrow{OG} = u\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}u\vec{a} + \frac{1}{6}u\vec{b} + \frac{1}{2}u\vec{c}$$

とも表せる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、2 つの式を比較すると、

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{1}{3}u \\ \frac{1}{3}s = \frac{1}{6}u \\ \frac{1}{3}t = \frac{1}{2}u \end{cases}$$

となる。これを解くと、 $u = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{4}, t = \frac{3}{4}$ となる。したがって $\overrightarrow{OG}$ は

$$\overrightarrow{OG} = u\overrightarrow{OF} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

である。ここで

$$|\overrightarrow{OG}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OF}| = \frac{5}{6}, |\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| = 1$$

である。よって、 $\triangle OMG$ と $\triangle OAF$ は相似であり、その相似比は 1:2 である。したがって、

$$S' = \left(\frac{1}{2} \right)^2 S = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}, S' = \frac{1}{4}$$

(1)

直線 PQ を式で表すと,

$$\frac{\frac{x}{3}}{\cos \theta} + \frac{\frac{y}{2}}{\sin \theta} = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3 \tan \theta} x + \frac{2}{\sin \theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

である。したがって、直線 PQ と曲線 C の共有点の x 座標は、次の方程式の解であり、解くと以下のようになる。

$$\frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} \left(-\frac{2}{3 \tan \theta} x + \frac{2}{\sin \theta} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) x^2 - \frac{2 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta} x + \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9 \sin^2 \theta} x^2 - \frac{2 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta} x + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6 \cos \theta \cdot x + 9 \cos^2 \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3 \cos \theta)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3 \cos \theta$$

よって重解を持つから、直線 PQ と曲線 C は 1 点で接する。

(証明終)

(2)

$\triangle OPQ$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\cos \theta} \cdot \frac{2}{\sin \theta} = \frac{3}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{6}{\sin 2\theta}$$

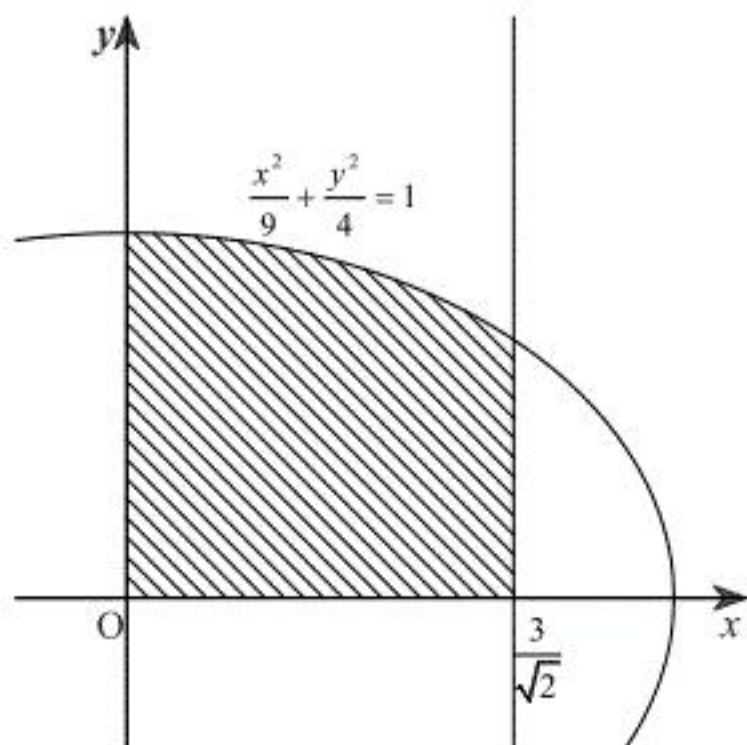
と表せる。 S が最小となるとき、 $\sin 2\theta$ は最大値をとる。したがって、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、

$0 < 2\theta < \pi$ であるから、 S が最小値をとるような θ の値は $2\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、つまり $\theta = \frac{\pi}{4}$ である。

(答) $\frac{\pi}{4}$

(3)

$x = 3 \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$ であるから、図形 D は下図の斜線部となる。



ここで曲線 C の $y \geq 0$ の部分は

$$y = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$$

と表せる。したがって、図形 D の面積を S' とすると、 S' は

$$S' = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} y dx = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - \frac{1}{9}x^2} dx$$

である。ここで、 $x = 3 \sin t$ とすると、 $dx = 3 \cos t dt$ であり、積分区間は次のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって求める面積は

$$S' = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt$$

$$= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 3 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

曲線 $y = 1 + \tan x$ について, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ である。したがって, 点 $(t, 1 + \tan t)$ における接線は

$$y = \frac{1}{\cos^2 t}(x - t) + 1 + \tan t$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\cos^2 t}x + 1 + \tan t - \frac{t}{\cos^2 t}$$

である。この直線と x 軸との交点の x 座標は, $y = 0$ とすると

$$0 = \frac{1}{\cos^2 t}x + 1 + \tan t - \frac{t}{\cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow x = t - \cos^2 t(1 + \tan t)$$

となる。したがって, $f(t) = t - \cos^2 t(1 + \tan t)$ である。関数 $f(t)$ を微分すると,

$$f'(t) = 1 - (\cos^2 t)'(1 + \tan t) - \cos^2 t(1 + \tan t)'$$

$$= 1 + 2 \sin t \cos t(1 + \tan t) - \cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= 2 \sin t(\sin t + \cos t)$$

$$= 2\sqrt{2} \sin t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから, $f'(t) = 0$ とすると,

$$f'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0, -\frac{\pi}{4} \left(\because -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

となる。したがって関数 $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	...	$-\frac{\pi}{4}$	...	0	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$			$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$		$f(0)$		

ここで

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(1 - 1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$f(0) = 0 - 1^2(1 + 0) = -1$$

である。したがって, $t = -\frac{\pi}{4}$ のとき極大値 $-\frac{\pi}{4}$, $t = 0$ のとき極小値 -1 をとる。