

I

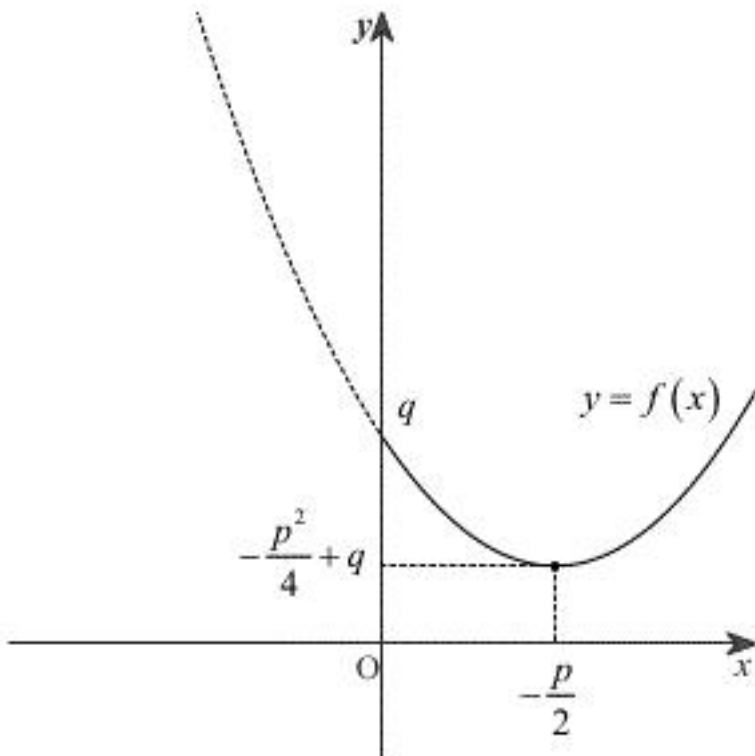
(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + px + q \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \end{aligned}$$

より、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = -\frac{p}{2}$ であり、頂点の y 座標は $-\frac{p^2}{4} + q$ である。

[1] $-\frac{p}{2} \geq 0$ すなわち $p \leq 0$ のとき

このとき、放物線 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



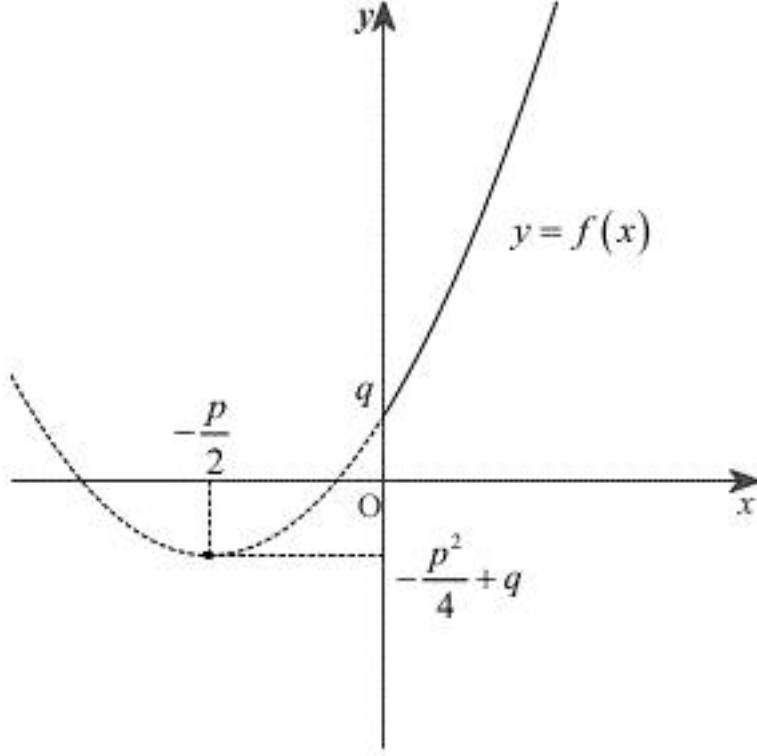
よって、 $x > 0$ において、関数 $f(x)$ の値が つねに正になるとき、

$$\begin{aligned} -\frac{p^2}{4} + q &> 0 \\ \Leftrightarrow q &> \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。

[2] $-\frac{p}{2} < 0$ すなわち $p > 0$ のとき

このとき、放物線 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



よって、 $x > 0$ において、関数 $f(x)$ の値が つねに正になるとき、

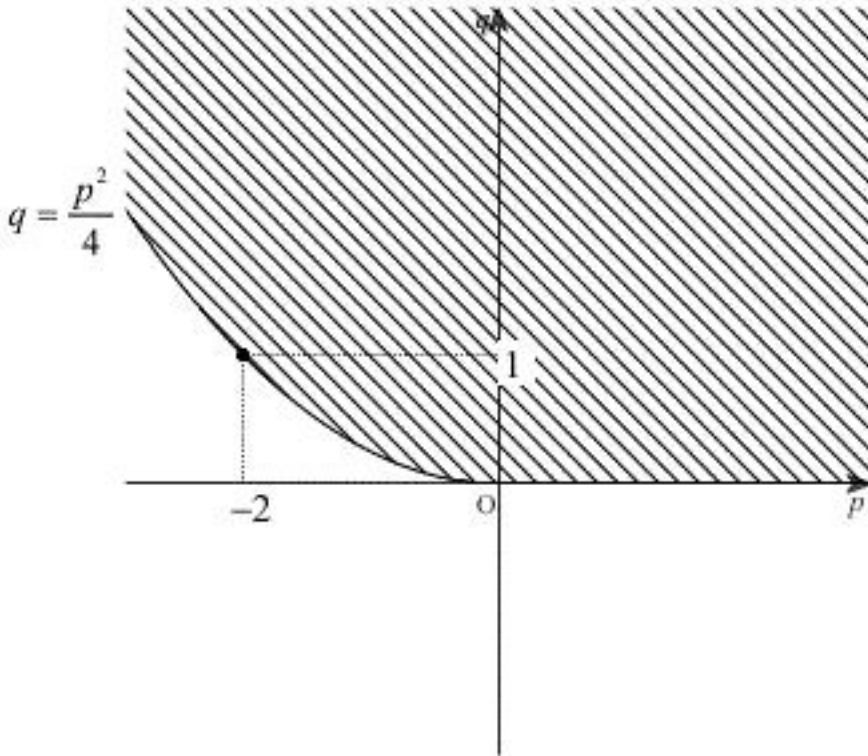
$$\begin{aligned} f(0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow q &\geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上、[1], [2]より、 $x > 0$ において、関数 $f(x)$ の値が つねに正になるとき、

$$p \leq 0, q > \frac{p^2}{4} \text{ または } p > 0, q \geq 0$$

が成り立つから、 (p, q) を座標とする点全体の集合を pq 平面上に図示すると、下図の斜線部分のようになる。ただし、 p 軸の $p > 0$ を満たす部分を含み、それ以外の境界線は含まない。



(答) 前図

(2)

2 次方程式 $x^2 - (2a-1)x + 2-a = 0$ において、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B &= 2a-1 \\ \tan A \tan B &= 2-a \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{2a-1}{1 - (2-a)} \\ &= 2 + \frac{1}{a-1} \end{aligned}$$

となる。また、2 次方程式 $x^2 - (2a-1)x + 2-a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、判別式は正となるから、

$$\begin{aligned} \{-(2a-1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2-a) &> 0 \\ \Leftrightarrow (2a+\sqrt{7})(2a-\sqrt{7}) &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a > \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (\because a > 0)$$

が成り立ち、これより $a > 1$ であるため、

$$2 + \frac{1}{a-1} > 2$$

であり、また、

$$\begin{aligned} a &> \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \Leftrightarrow a-1 &> \frac{\sqrt{7}}{2} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a-1} &< \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2} - 1} \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{a-1} &< 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2} - 1} \\ \therefore 2 + \frac{1}{a-1} &< \frac{10+2\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

であるから、 $2 < \tan(A+B) < \frac{10+2\sqrt{7}}{3}$ となる。

$$(答) \quad 2 < \tan(A+B) < \frac{10+2\sqrt{7}}{3}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x} \cdot (\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left\{ \left[-\frac{1}{x} \cdot \log x \right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) dx \right\} \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \right) \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \right) \\ &= 2 - \frac{5}{e} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad 2 - \frac{5}{e}$$

2

(1)

 $\angle AOB = 60^\circ$ より,

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、点 C は辺 OA を 3:1 に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3}{3+1} \vec{a} = \frac{3}{4} \vec{a}$$

となり、点 P は辺 AB を $u:(1-u)$ に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = (1-u) \vec{a} + u \vec{b}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \\ &= \left(\frac{1}{4} - u \right) \vec{a} + u \vec{b}\end{aligned}$$

となり、辺 OA と直線 CP が垂直であることより、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4} - u \right) \vec{a} + u \vec{b} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - u \right) |\vec{a}|^2 + u \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - u \right) |\vec{a}|^2 + u \cdot \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - u \right) |\vec{a}| + \frac{1}{2} u |\vec{b}| &= 0 \quad (\because |\vec{a}| \neq 0) \\ \therefore \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} &= \frac{4u-1}{2u} \quad (\because u > 0) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{4u-1}{2u}$$

(2)

②について、 $OA > OB$ より、

$$\begin{aligned}\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4u-1}{2u} &< 1 \\ \Leftrightarrow 4u-1 &< 2u \quad (\because u > 0) \\ \therefore 0 &< u < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、点 D は辺 OB を 4:1 に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{4}{4+1} \vec{b} = \frac{4}{5} \vec{b} \\ \overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} \\ &= (1-u) \vec{a} + \left(u - \frac{4}{5} \right) \vec{b}\end{aligned}$$

となる。次に、辺 OA と直線 CP が垂直であることより、線分 OP は $\triangle OCP$ の外接円の直径となるから、点 D が $\triangle OCP$ の外接円上にあるとき、辺 OB と直線 DP は垂直となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \left\{ (1-u) \vec{a} + \left(u - \frac{4}{5} \right) \vec{b} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-u) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(u - \frac{4}{5} \right) |\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-u) \cdot \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| + \left(u - \frac{4}{5} \right) |\vec{b}|^2 &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \Leftrightarrow (1-u) \cdot \frac{1}{2} |\vec{a}| + \left(u - \frac{4}{5} \right) |\vec{b}| &= 0 \quad (\because |\vec{b}| \neq 0) \\ \therefore \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} &= \frac{5u-5}{10u-8} \quad (\because \textcircled{3}) \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となり、 $OA > OB$ より、

$$\begin{aligned}\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{5u-5}{10u-8} &< 1 \\ \Leftrightarrow 5u-5 &> 10u-8 \quad (\because \textcircled{3}) \\ \therefore u &< \frac{3}{5}\end{aligned}$$

が成り立ち、これと③より、 $0 < u < \frac{1}{2}$ である。また、②、④より、

$$\begin{aligned}\frac{4u-1}{2u} &= \frac{5u-5}{10u-8} \\ \Leftrightarrow (4u-1)(10u-8) &= 2u(5u-5) \\ \Leftrightarrow (5u-2)(3u-2) &= 0 \\ \therefore u &= \frac{2}{5} \quad \left(\because 0 < u < \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-u) \vec{a} + u \vec{b} \\ &= \frac{3}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{3}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}$$

3

(1)

$y = -ax^2 + b$, $y = -2\log x$ を x について微分すると、それぞれ

$$y' = -2ax$$

$$y' = -\frac{2}{x}$$

となり、点 P において C_1, C_2 は共通の接線をもつことより、点 P の x 座標を $t (t > 0)$ とすると、接線の傾きについて

$$-2at = -\frac{2}{t}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{a} (\because a > 0)$$

$$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{a}} (\because t > 0)$$

が得られる。また、点 P において C_1, C_2 は共有点をもつから、点 P の y 座標について

$$-at^2 + b = -2\log t$$

$$\Leftrightarrow -a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + b = -2\log\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\because t = \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\therefore b = 1 + \log a$$

が成り立ち、

$$b > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log a > 0$$

$$\Leftrightarrow \log a > -1$$

$$\therefore a > \frac{1}{e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = 1 + \log a, \quad a > \frac{1}{e}$$

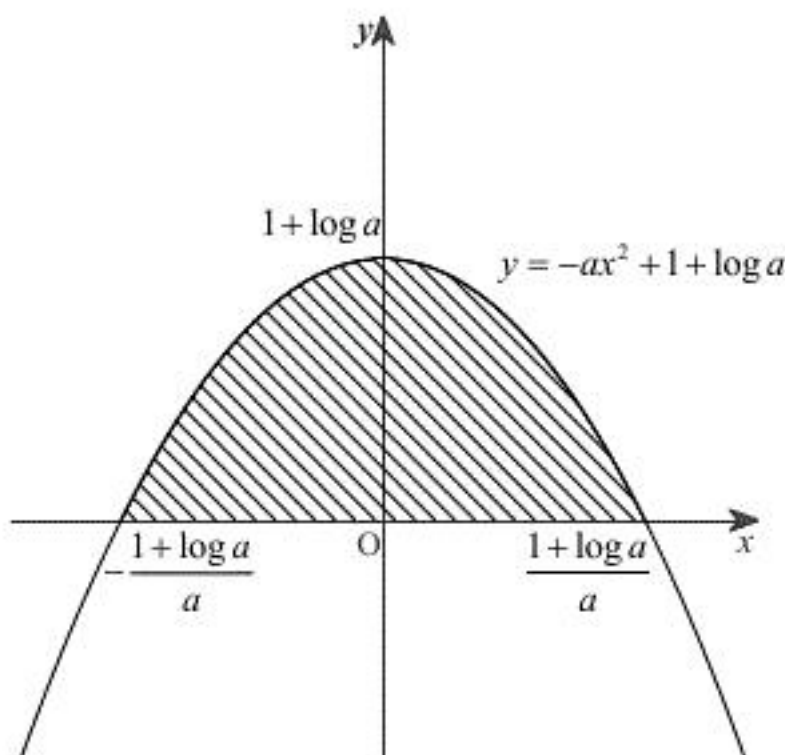
(2)

$b = 1 + \log a$ より、曲線 C_1 の方程式は

$$y = -ax^2 + b$$

$$= -ax^2 + 1 + \log a$$

となり、曲線 C_1 と x 軸に囲まれた部分を図示すると、下図の斜線部分のようになる。



ここで曲線 C_1 の方程式について

$$y = -ax^2 + b$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{b-y}{a}$$

であるから、曲線 C_1 と x 軸に囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V(a)$ は

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^b \pi x^2 dy \\ &= \int_0^b \pi \left(\frac{b-y}{a} \right) dy \\ &= \frac{\pi}{a} \left[by - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^b \\ &= \frac{\pi}{a} \left\{ \left(b^2 - \frac{1}{2} b^2 \right) - 0 \right\} \\ &= \frac{\pi b^2}{2a} \end{aligned}$$

となり、 $b = 1 + \log a$ より、 $V(a) = \frac{\pi(1+\log a)^2}{2a}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi(1+\log a)^2}{2a}$$

(3)

$V(a)$ を a について微分すると、

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2(1+\log a) \cdot \frac{1}{a} \cdot a - (1+\log a)^2 \cdot 1}{a^2} \\ &= \frac{\pi(1+\log a)(1-\log a)}{2a^2} \end{aligned}$$

となる。このとき、 $a > \frac{1}{e}$ より、

$$1 + \log a > 1 + \log \frac{1}{e} = 0$$

であり、

$$1 - \log a = 0$$

$$\therefore a = e$$

となるから、 $V(a)$ の増減表は下表のようになる。

a	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$V'(a)$		$+$	0	$-$
$V(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって、 $V(a)$ は $a = e$ において、最大値

$$\begin{aligned} V(e) &= \frac{\pi(1+\log e)^2}{2e} \\ &= \frac{2\pi}{e} \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad a = e \text{ において、最大値 } \frac{2\pi}{e}$$

4

(1)

$f(x), g(x)$ を x について微分すると,

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$g'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

となるから,

$$f'(x) + g'(x) = -2e^{-x} \sin x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) + g'(x) = -2e^{-x} \sin x$$

(2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx \\ &= \int_0^\pi \frac{f'(x) + g'(x)}{-2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(\int_0^\pi f'(x) dx + \int_0^\pi g'(x) dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left([f(x)]_0^\pi + [g(x)]_0^\pi \right) \\ &= -\frac{1}{2} (f(\pi) - f(0) + g(\pi) - g(0)) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi}) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_1 = \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi})$$

(3)

$I_{n+1} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx$ について, $x = t + \pi$ とおくと, $dx = dt$ であり,

x	$n\pi$	$\rightarrow$	$(n+1)\pi$
t	$(n-1)\pi$	$\rightarrow$	$n\pi$

となるから,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx \\ &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(t + \pi) dt \\ &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-(t+\pi)} \sin(t + \pi) dt \\ &= e^{-\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t} \cdot (-\sin t) dt \\ &= -e^{-\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= -e^{-\pi} I_n \end{aligned}$$

が成り立ち, 数列 $\{I_n\}$ は公比 $-e^{-\pi}$ の等比数列となる。

$$(\text{答}) \quad -e^{-\pi}$$

(4)

$0 < e^{-\pi} < 1$ より, $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} I_n &= \frac{I_1}{1 - (-e^{-\pi})} \\ &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 + e^{-\pi})} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

に収束する。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \text{ に収束する。}$$