

数 学

(平成 8 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図までこの冊子を開いてみてはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を解答用紙 C 12—1 の表と裏、C 12—2 の表に必ず記入しなさい。
4. この冊子には 5 問題あります。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は手を挙げて監督者に知らせなさい。
5. 解答は必ず解答用紙 C 12—1 および C 12—2 の指定箇所（問題番号と一致する番号のところ）に記入しなさい。
6. 下書きにはこの冊子の余白を使用しなさい。
7. 試験終了後、問題冊子を持ち帰ってもよい。

1 $x > 0$ で定義された曲線 $C: y = f(x)$ がある。 C 上の点 $(x, f(x))$ における接線が y 軸と交わる点と点 $(x, 0)$ を通る直線はつねに定点 $(-1, 2)$ を通る。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。
- (2) $f(x) = xg(x)$ とおくとき, $g(x)$ を求めよ。
- (3) $f(1) = 2 \log 2$ であるとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。

2 平面上に4つのベクトル

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

がある。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$ がベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍となるような θ の値を求めよ。

- (2) (1)で求めた θ に対して、 $\tan \theta \tan 2\theta \tan 3\theta \tan 4\theta$ の値を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{9}$ と関係式

$$a_{n+3} = \frac{1}{3} a_{n+2} + \frac{5}{9} a_{n+1} + \frac{1}{9} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $pa_{n+2} + qa_{n+1} + a_n = pa_3 + qa_2 + a_1$ がつねに成り立つような定数 p, q を求めよ。

(2) (1)で求めた q に対して, $\frac{q}{2} a_{n+1} + a_n$ を n の式で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

4 xyz 空間内の 3 点 $A(4\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を通る平面 α は無限に広い鏡であるとする。点 $D(0, 0, 1)$ に点光源を置くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 平面 α に関して点 D と対称な点 E の座標を求めよ。
- (2) D を出た光線が平面 α 上の点 P で反射した後に xy 平面上の点 Q に至るとする。 $DP + PQ$ が最小となるような点 P の座標を求めよ。

5 原点 O の xy 平面上に点 $A(0, 1)$ と曲線 $C: y = x^2$ ($0 < x < 1$) がある。
 C 上の点 $P(t, t^2)$ に対して、 $\theta = \angle OAP$ とおく。線分 OA , AP と曲線 C とで囲まれた図形の面積を S とするとき、次の問いに答えよ。

(1) S を t の式で表せ。

(2) $\tan \theta$ を t の式で表せ。

(3) $\frac{dS}{d\theta}$ が最小となるような θ に対する $\tan \theta$ を求めよ。