

数 学

(平成 9 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてみてはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を解答用紙 D 12—1 の表と裏、D 12—2 の表に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には 6 問題あります。問題 1, 2, 3, 4 は新教育課程と旧教育課程の共通の範囲から出題されています。問題 5 は新教育課程により、問題 6 は旧教育課程より出題されています。

問題 1, 2, 3, 4 は必ず解答すること。

問題 5, 問題 6 はいずれか一題のみを選択して解答すること。

5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙 D 12—1 および D 12—2 の指定箇所（問題番号と一致する番号のところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰ってもよい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - 1\right)\left(\frac{1}{a_{n+2}} - 1\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たしている。一般項 a_n が n を用いてどのように表されるかを推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

(2) 次の定積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^{-x}}$$

2 α を正の定数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1)

$$f(x) = x^{-\alpha} \int_1^x \frac{\log t}{t} dt \quad (x \geq 1)$$

を最大にする x を β とするとき、 β を α で表せ。

(2) (1)で求めた β に対して

$$\int_1^\beta t^{\alpha-1} \log t dt$$

の値を求めよ。

3 xy 平面上を運動する点 P の時刻 t における座標は

$$\begin{cases} x = \cos t + a \cos 2t \\ y = \sin t + a \sin 2t \end{cases}$$

で与えられている。ただし、 a は $0 < a < \frac{1}{2}$ なる定数である。点 $(-a, 0)$ を A で表す。このとき、次の問いに答えよ。

(1) A から P への距離の最大値と最小値を求めよ。

(2) 点 Q をベクトル $\overrightarrow{PQ}$ が P の速度ベクトルとなるように定めるとき、三角形 APQ の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $S(t)$ に対して

$$\int_0^{\pi} S(t) dt$$

を求めよ。

4 四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。線分 OA を $2:1$ に内分する点を P , 線分 PB を $2:1$ に内分する点を Q , 線分 QC を $2:1$ に内分する点を R , 直線 OR と三角形 ABC との交点を S とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OR}$ を, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OS}$ を, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積を V_1 , 四面体 $OPQR$ の体積を V_2 とするとき, $\frac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

5 複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数) に対して, 複素数 w を

$$w = \frac{z}{z + 1}$$

で定める。以下の 3 つの各場合について, w のとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。

(1) $y > 0$

(2) $x^2 + y^2 > 1$ かつ $y > 0$

(3) $|x| < \frac{1}{2}$ かつ $y > 0$

6 座標空間内に x 軸と点 $P(t, 0, 0)$ で接する半径 2 の球 S がある。また、点 $(0, 0, 1)$ を通り y 軸に平行な直線 l が、球 S と点 Q で接している。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) t の範囲を求めよ。
- (2) $t = 0$ のとき、 S の中心の座標を求めよ。
- (3) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。