

数 学

(平成 10 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を 3 枚の解答用紙（A8—1 から A8—3）の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。（1 枚目、2 枚目は表裏のそれぞれ 2 箇所、3 枚目は表のみ）
4. この問題冊子には、問題 1、2、3、4 A、4 B、5 A、5 B があります。問題 1、2、3 は必ず解答すること。
問題 4 A、4 B のいずれか一題を選択し解答すること。
問題 5 A、5 B のいずれか一題を選択し解答すること。
問題 4 A と 4 B の両方を解答したり、問題 5 A と 5 B の両方を解答したりすることは認められません。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙（A8—1 から A8—3）の指定箇所（問題番号・記号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってもかまいません。

1 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{2\pi} x^2 |\sin x| dx$$

$$(2) \int_1^{e^{-1}} \frac{\log(\log(x+1))}{x+1} dx \quad (e \text{ は自然対数の底})$$

2 曲線 $C: y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ ($t > 0$) における接線を ℓ とし, C と ℓ の P 以外の交点 Q の x 座標を u とする。次の問いに答えよ。

(1) Q の座標を t で表せ。

(2) C と ℓ とで囲まれた図形の面積を t で表せ。

(3) a を正の定数とするとき, C 上の点 $R(v, v^3)$ ($v < u$) を $\triangle PQR$ の面積が a に等しくなるようにとる。 R を通り, ℓ に平行な直線と x 軸との交点の x 座標を w とするとき, $w > t$ となるための, a と t との関係を求めよ。

3 次の各問いに答えよ。

- (1) 平面上に一辺の長さが4の正三角形がある。 r を1以下の正の実数とし、半径 r の円の中心が、平面内でこの正三角形の辺上を一周するとき、この円が通過する部分の面積を求めよ。
- (2) 空間内に一辺の長さが4の正三角形があり、半径1の球の中心がこの三角形の周上を一周するとき、この球が通過する部分の体積を求めよ。

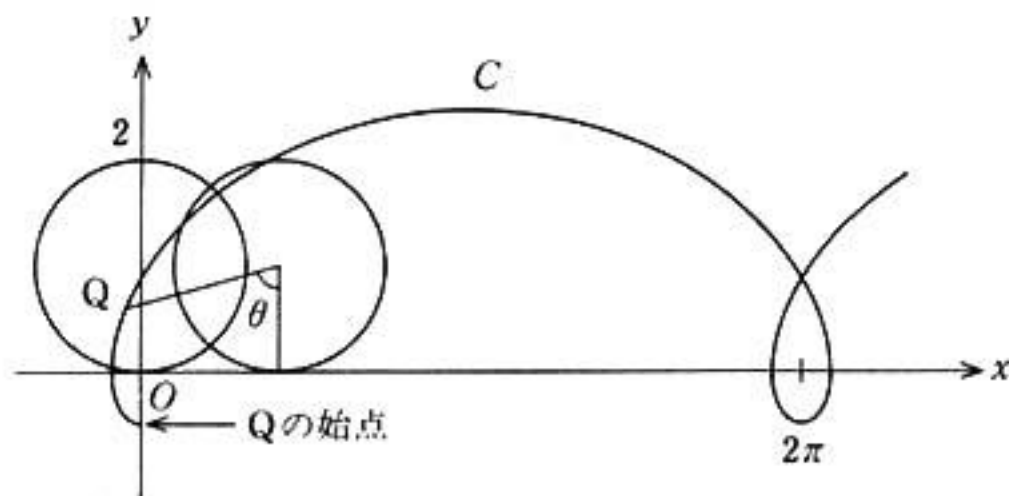
4A 両端を P, Q とする長さ k ($k > 1$) の棒を、その一端 P が半径 1 の円板の中心に一致するように、棒を円板に貼り付ける。この棒のついた円板を棒の両端 P, Q がそれぞれ点 $(0, 1), (0, 1-k)$ に一致するように xy 平面上におき、その円板の周が x 軸上を滑ることなく、 x 軸の正の向きに転がるように円板を転がすとき、 Q は下図のような曲線 C を描く。次の問いに答えよ。

(1) 円板が角 θ だけ回転したときの点 Q の座標を (x, y) とすると、

$$x = \theta - k \sin \theta, \quad y = 1 - k \cos \theta \quad \text{と表せることを示せ。}$$

(2) 円板が一定の速さで転がるとき、点 Q の速さが最大となるときの θ を求めよ。

(3) $k = \frac{\pi}{3}$ のとき、この曲線 C と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。



4B a を $0 \leq a < 1$ なる定数とし、数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1 + a$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n + a} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $0 < x_{n+1} \leq \frac{1}{2} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ となることを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n^p}$ が 0 でない有限の値となるような定数 p を求め、さらにこの極限値を求めよ。

5A 2つの異なる定まった複素数 α, β がある。自然数 n と複素数 w が与えられたとき、複素数 z_n を

$$\frac{z_n - \alpha}{\beta - \alpha} = w^n$$

で定める。 α, β, z_n の表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, P_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) 3点 A, B, P_1 および A, B, P_2 が面積の等しい三角形をつくるための w の条件を求め、これを複素数平面上に図示せよ。
- (2) $\alpha = 0, \beta = i$ とし、 w が(1)で求めた条件を満たしながら変わるとき、 P_2 の描く図形を図示せよ。ただし、 i は虚数単位である。

5B O を原点とする xy 平面上に 2 点 $A(0, 1)$, $P(t, 0)$ ($t > 1$) と円 $C: x^2 + y^2 = 1$ がある。線分 AP が円 C と A 以外で交わる点を Q とする。線分 AQ と円 C によって囲まれる領域のうち面積の小さい方を D_1 とし、線分 PQ と x 軸および円 C によって囲まれる領域を D_2 とする。次の問いに答えよ。

- (1) Q の座標を t で表せ。
- (2) D_1 と D_2 の面積が等しいとき、 t を求めよ。
- (3) D_1 を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を t のできるだけ簡単な式で表せ。