

数 学

(平成 10 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてみてはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を解答用紙 A 12—1 と A 12—2 の表と裏、A 12—3 の表に必ず記入しなさい。
4. この冊子には 5 問題あります。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は手を挙げて監督者に知らせなさい。
5. 解答は必ず解答用紙 A 12—1 から A 12—3 の指定箇所（問題番号と一致する番号のところ）に記入しなさい。
6. 下書きにはこの冊子の余白を使用しなさい。
7. 試験終了後、問題冊子を持ち帰ってもよい。

1 原点を O とする xy 平面上に曲線

$$C: y = -x^2 + x + 2$$

と 2 点 $A(0, 2)$, $B(2, 0)$ がある。 $0 < a < b < 2$ とし, x 座標が a , b である C 上の 2 点をそれぞれ P , Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 五角形 $OAPQB$ の面積を a , b で表せ。

(2) (1)で求めた面積が最大となるような a , b を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき、つねに不等式

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+ay}$$

が成り立つような正の定数 a の最大値を求めよ。

- (2) a を (1) で求めた値とする。 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ のとき、つねに不等式

$$\sqrt{x+y+z} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z} \geq \sqrt{x+ay+bz}$$

が成り立つような正の定数 b の最大値を求めよ。

3 a, b は $0 < a < b < 2$ で $b^2 - a^2 = 2$ を満たす。

$a + b = t$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\int_a^b x(x-1)^2 dx$ を t で表せ。

(3) a, b を動かすとき、(2) の積分の値が最小となるような a, b を求めよ。

4 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ は $x=2$ で極値 1 をとる。次の問いに答えよ。

(1) a, b を求めよ。

(2) 曲線 $C: y = f(x)$ と x 軸との交点を通り、傾き k の直線を l とする。

$0 < k < \frac{64}{25}$ のとき、 C と l とは異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) $0 < k < \frac{64}{25}$ のとき、 C と l とで囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値を S とする。 $k = 4 \cos^2 t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) とおき、 S を t の式で表せ。

(4) $\lim_{k \rightarrow +0} S$ を求めよ。

5 曲線

$$C: x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 < t < 2\pi)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) x 軸上の定点 $(a, 0)$ ($0 < a < 2\pi$) からの距離が最小となる C 上の点の座標を求めよ。
- (2) C 上の点 P における接線に垂直で、 P を通る直線を l とする。 P からの距離が 1 となる l 上の 2 点のうち、その y 座標が小さい方を Q とする。 P が C 上を動くとき、 Q の描く曲線の第 1 象限に含まれる部分の長さを求めよ。