

数 学

(平成 11 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を解答用紙 A12—1 と A12—2 の表と裏、A12—3 の表に必ず記入しなさい。
4. この冊子には 5 問題あります。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
5. 解答は必ず解答用紙 A12—1 から A12—3 の指定箇所(問題番号と一致する番号のところ)に記入しなさい。
6. 下書きにはこの冊子の余白を使用しなさい。
7. 試験終了後、問題冊子を持ち帰ってもよい。

1 a, b を実数とする x の方程式

$$x^4 + (a + b)(x + 1)x^2 + (ax + b)(bx + a) = 0$$

の異なる実数解の個数を n とする。次の問いに答えよ。

(1) $n \leq 1$ であるときの点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(2) (1)で図示した範囲の面積を求めよ。

(3) $n = 3$ であるときの点 (a, b) の範囲を図示せよ。

2 2以上の自然数 n に対して、不等式

$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n-1}$$

が成り立つことを証明せよ。

3 2つの曲線 $C_1 : y = \frac{\log x}{x^2}$ と $C_2 : y = a \log x$ ($0 < a < 1$)がある。次の問いに答えよ。ただし、必要があれば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを用いてよい。

(1) C_1 のグラフを描け。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。

(3) $\lim_{a \rightarrow +0} S(a)$ を求めよ。

4 複素数 z と w の間には

$$w = \frac{z - \beta}{z - \alpha}$$

の関係がある。複素数平面上において、 z が実軸上を動くとき w は原点を中心とする半径 1 の円の周上を動く。ただし、 α, β は $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $|\alpha| \neq 1$ かつ $\alpha \neq \beta$ を満たす複素数とする。次の問いに答えよ。

- (1) β を α の式で表せ。
- (2) z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くときには、 w はある円の周上を動く。その円の半径を $r(\alpha)$ とする。 $r(\alpha)$ を α の式で表せ。
- (3) $\alpha + \bar{\alpha} = 4$ のとき、 $r(\alpha)$ の最大値を求めよ。

5 O を原点とする xy 平面上の曲線 $C: y = \sqrt{ax}$ 上の点 P と x 軸上の点 $Q(t, 0)$ ($t > 0$) を $PQ = 1$ となるようにとる。ただし、 a は正の定数である。次の問いに答えよ。

(1) t の最大値を求めよ。

(2) $\theta = \angle OQP$ とするとき、 $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $a = \frac{8}{3}$ とする。曲線 C 、線分 PQ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積の最大値とそのときの $\cos \theta$ の値を求めよ。