

1 自然数 a, b, c, d が $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) d が 3 で割りきれらるならば, a, b, c はすべて 3 で割りきれるか, a, b, c のどれも 3 で割りきれないかのどちらかであることを示せ。

(2) a, b, c のうち偶数が少なくとも 2 つあることを示せ。

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0 = 1, a_n = \sum_{k=1}^n 3^k a_{n-k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 をそれぞれ求めよ。

(2) a_n を求めよ。

3 z を絶対値 1, 偏角 θ の複素数とする。ただし, θ は $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲を動くものとする。複素数 $1, z, z^3$ の表す複素数平面上の点をそれぞれ P, Q, R とし, 三角形 PQR の重心を表す複素数を w とする。

(1) w を z で表せ。

(2) $|w|^2$ の最小値を求めよ。

4 xy 平面上で、曲線

$$y = \begin{cases} -x^2 + 4 & (x < 1) \\ x^2 - 4x + 6 & (x \geq 1) \end{cases}$$

と x 軸および 2 つの直線 $x = t$, $x = t + 1$ によって囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) $t \geq -2$ の範囲で、 S を t の式で表せ。

(2) (1)で求めた S のグラフを描け。