

1 次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^1 x^3 2^{x^2} dx$

(2) $\int_1^2 \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$

2 xy 平面上に曲線

$$C: \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

がある。 C 上に異なる2点 $P(2 \cos \alpha, \sin \alpha)$ および $Q(2 \cos \beta, \sin \beta)$ をとる。
次の問いに答えよ。

(1) 点 P における C の法線の方程式を求めよ。

(2) 点 P における C の法線と点 Q における C の法線の交点の座標を (s, t) とし、

$$u = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} s, \quad v = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} t$$

とするとき、 u, v を α の式で表せ。

- 3 実数 t に対して, $0 \leq x \leq 2$ における $\left| x^3 - 3tx^2 - \frac{3}{4} \right|$ の最大値を $f(t)$ とする。このとき, $f(t)$ を t の式で表し, そのグラフをかけ。

4 複素数平面上で、点 1 と点 i を結ぶ線分を ℓ とする。ただし、 i は虚数単位で、点 1 と点 i は ℓ に含まれる。点 α と点 β が ℓ 上を動くとき、点 $\alpha\beta$ の動く範囲を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 $x + yi$ (x, y は実数) が D に含まれるための x, y の条件を求めよ。

(2) D を図示せよ。

5 $f(x) = \frac{x}{1+x+x\sqrt{x}}$ とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ でつねに増加することを示せ。

(2) $\frac{1}{(\sqrt{n}+1)^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} a_k$ を求めよ。