

1 関数

$$f(\theta) = \left(\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

と

$$g(\theta) = \left(\sin \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) \left(\cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} \right)$$

がある。 θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲を動くとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ の大小を比較せよ。
- (2) $|f(\theta) - g(\theta)| < 2$ となる θ の範囲を求めよ。
- (3) $\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2 放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ ($t > 0$) における C の接線と直交し P を通る直線を l とする。 C と l で囲まれる部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) S を t の式で表せ。

(3) t が $t > 0$ の範囲を動くとき、 S の最小値とそのときの t の値を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 0$ と関係式

$$a_{n+1} = (n+1)a_n - (-1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^n {}_n C_k a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) b_1, b_2, b_3, b_4 をそれぞれ求めよ。
- (2) b_n が n のどのような式で表されるかを推測せよ。
- (3) (2) における推測が正しいことを証明せよ。

4 a を実数とする。 x の方程式

$$x^3 - 3x = a^3 - 3a$$

が異なる 3 つの実数解 α , β , γ をもつとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフを図示せよ。

(2) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)で求めた範囲を動くとき、 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ のとりうる値の範囲を求めよ。