

1 次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式

$$\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 定積分

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$$

を求めよ。

2 a, b は実数とする。 x の方程式

$$|x^2 + ax + b| = |x^2 + bx + a|$$

の異なる実数解の個数を n とする。次の問いに答えよ。

(1) $n = 1$ となる点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(2) $n = 2$ であるとき、この方程式の実数解を求めよ。

3 平面上に円 $C : x^2 + y^2 = 1$ がある。点 $P(0, -k)$ を通り、 x 軸の正の向きとのなす角が θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) である直線と C との交点を X, Y とする。ただし、 k は $0 < k < 1$ を満たす定数である。次の問いに答えよ。

(1) 線分 XY の長さを求めよ。

(2) 2 点 X, Y を除いた C 上を点 Z が動くときの $\triangle XYZ$ の面積の最大値を S とする。 S を求めよ。

(3) θ を動かすとき、(2) で求めた S が最大となるときの $\cos \theta$ を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, a_2 = 1$$

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる。次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。

(2) m を自然数とするとき、 a_{6m} は 8 の倍数であることを示せ。

5 曲線 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ の極方程式を $r = f(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{3}{4}\pi + 0} f(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right)$ を求めよ。

(3) $\tan \theta = t$ とおき、置換積分法を使って $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(\theta)\}^2 d\theta$ を求めよ。