

1 (1) 方程式

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 3x} = 3$$

の $0^\circ \leq x \leq 135^\circ$ における解の個数を求めよ。

(2) x, y, z は 1 と異なる正の数で、次の条件を満たしている。

$$\log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{7}{2}$$

$$\log_z y + \log_x z + \log_y x = \frac{7}{2}$$

$$xyz = 2^{10}$$

$$x \leq y \leq z$$

x, y, z を求めよ。

2 0以上の整数 m, n に対し,

$$a_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

とする。ただし, $0! = 1$ である。次の問いに答えよ。

(1) $a_{m,n+1} + a_{m+1,n} = 4a_{m,n}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $a_{m,n}$ は整数であることを証明せよ。必要ならば組合せの数

$${}_pC_q = \frac{p!}{q!(p-q)!} \text{ が整数であることを用いてもよい。}$$

3 $\triangle ABC$ において

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x, \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = y, \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = z$$

とおく。ここで $\cdot$ は内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) 各辺の長さをそれぞれ x, y, z を用いて表せ。

(2) $xy + yz + zx > 0$ が成り立つことを証明せよ。

4 xy 平面上に点 $(a, 2)$ を中心とし、原点 O を通る円 C がある。 C が放物線 $y = x^2$ と異なる 4 点で交わる時、次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) a が (1) で求めた条件を満たしながら変化するとき、 C の動く範囲を図示せよ。