

1 xy 平面上に原点 O と点 $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ を頂点とする $\triangle OAB$ がある。 $\triangle OAB$ の各辺上の点 $P(s, s)$ ($0 < s < 1$), $Q(t, -t)$ ($0 < t < 1$), $R(1, u)$ ($-1 < u < 1$) は, $\triangle PQR$ の重心が $\triangle OAB$ の重心と一致するように動く。次の問いに答えよ。

- (1) s, t をそれぞれ u の式で表せ。
- (2) 線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ。
- (3) $\triangle PQR$ の面積を u の式で表せ。

2 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x (t+1)(x+1) dt$$

で定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ と導関数 $f'(x)$ をそれぞれ x の整式で表せ。

(2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)}$ を求めよ。

(3) $\frac{f(n) - \sum_{k=1}^n f'\left(k - \frac{1}{2}\right)}{n}$ を求めよ。

3 a, b, c を実数とする。関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、つねに $|f(x)| \leq 1$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $f'(0)$ を $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)$ を用いて表せ。

(2) $|f'(0)| \leq 8$ であることを証明せよ。

(3) $|f'(0)| = 8$ となるとき $f(x)$ を求めよ。

4 a を正の実数とする。曲線 $C : y = x^3 - ax$ 上を動く点 $P(t, t^3 - at)$ ($t > 0$) について、 P における C の接線と C の交点で P と異なる点を Q とする。さらに、 Q における C の接線と C の交点で Q と異なる点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の内積を a, t を用いて表せ。

(2) t の値にかかわらず、 $\triangle PQR$ について、つねに $\angle P > 90^\circ$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(3) $a = \frac{4}{3}$ とする。 $\triangle PQR$ が $\angle P = 90^\circ$ の二等辺三角形となるときの t の値を求めよ。