

- 1 xy 平面上に原点 O と点 $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ を頂点とする $\triangle OAB$ がある。 $\triangle OAB$ の周上の異なる 2 点 P , Q は線分 PQ が $\triangle OAB$ の面積を二等分するように動く。 PQ の中点の軌跡を求め図示せよ。

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+2} = 1 - |a_{n+1}| + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ のとき, a_{100} を求めよ。

(2) $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ であることを示せ。

(3) a_1, a_2 は $|a_1| \leq 2$, $|a_2| \leq 2$ を満たす整数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ とならない a_1, a_2 の組をすべて求めよ。

3 a を正の定数とし,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}(1-x)^n \quad \left(\frac{a-1}{a} < x < \frac{a+1}{a} \right)$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。ただし、 $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることを用いてもよい。

(2) 方程式

$$f(x) - \frac{1}{a(ax - a + 1)} - m = 0$$

が異なる 2 つの実数解をもつような実数 m の範囲を求めよ。

4 実数 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たすとする。 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 $\cos \alpha$ の円 A と、点 $F(\sin \alpha, 0)$ がある。 A の周上に点 P をとり、 P で A に内接し F を通る円を B とする。 P が A の周上を動くとき、 B の中心の軌跡を C とする。 次の問いに答えよ。

(1) C を x, y の方程式で表せ。

(2) C の極方程式を求めよ。

(3) P が A の周上を、点 Q は C 上を動くときの PQ の最大値を $f(\alpha)$ とする。

α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき、 $f(\alpha)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

5 x の多項式 $f(x)$ で, $f(0)=0$ かつ $f(1)=f(-1)$ を満たすものすべての集合を M とする。定数 a, b, c, d に対し, $g(x)=x^2+ax+b$, $h(x)=x^3+cx+d$ が M の要素であるとき, 次の問いに答えよ。

(1) a, b, c, d を求めよ。

(2) M の任意の要素は, 次の形の多項式をいくつか加え合わせたもので表せることを示せ。

$$k(g(x))^m(h(x))^n$$

ただし, k は定数, m, n は 0 以上の整数であり, $(g(x))^0=1$,
 $(h(x))^0=1$ とする。