

$$(1) \quad \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \text{ より, } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

(等号は $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, つまり $x = y$ のとき成立。) (証明終)

$$(2) \quad \frac{x+y}{2} > 1 \text{ だから, (1)より,}$$

$$\log_{10} \frac{x+y}{2} \geq \log_{10} \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log_{10} x + \log_{10} y)$$

(等号は $x = y$ のとき成立。)

さらに(1)より,

$$\frac{1}{2}(\log_{10} x + \log_{10} y) \geq \sqrt{\log_{10} x \cdot \log_{10} y}$$

(等号は $\log_{10} x = \log_{10} y$, つまり $x = y$ のとき成立。)

であるから,

$$\left(\log_{10} \frac{x+y}{2} \right)^2 \geq \log_{10} x \cdot \log_{10} y$$

(等号は $x = y$ のとき成立。) (証明終)

$$(3) \quad (2) \text{において } y = 2 + x \text{ とすると,}$$

$$(\log_{10} (1+x))^2 > \log_{10} x \cdot \log_{10} (2+x)$$

($x \neq 2+x=y$ より, 等号は不成立。)

よって,

$$\frac{\log_{10} (1+x)}{\log_{10} x} > \frac{\log_{10} (2+x)}{\log_{10} (1+x)}$$

$$\therefore \log_x (1+x) > \log_{1+x} (2+x) \quad (\text{証明終})$$

$$(1) \quad OP \cdot OQ = 4 \text{ より, } (x^2 + y^2)(X^2 + Y^2) = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, 半直線 } OP \text{ の傾きについて, } \frac{y}{x} = \frac{Y}{X} \quad \cdots \textcircled{2}$$

②を $Y = \frac{y}{x}X$ として①に代入すると,

$$(x^2 + y^2) \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) X^2 = 16 \quad \therefore X = \frac{4x}{x^2 + y^2}$$

$$\text{よって, ②より, } (X, Y) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2}, \frac{4y}{x^2 + y^2}\right) \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$(2) \quad (1) \text{ より, } X + Y = \frac{4}{x^2 + y^2}(x + y)$$

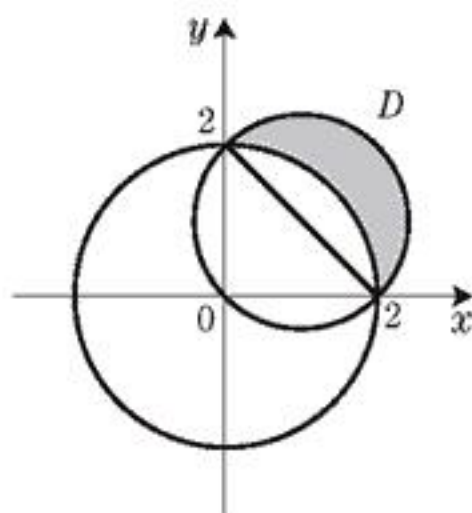
$$\textcircled{1} \text{ より, } \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{16}{X^2 + Y^2} \\ x + y = \frac{4(X + Y)}{X^2 + Y^2} \end{cases}$$

$$\text{よって, } D \text{ は, } \begin{cases} X^2 + Y^2 - 2(X + Y) \leq 0 \\ X^2 + Y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{となり, 変数を } x, y \text{ として, } \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(3) D を図示すると右図の塗部分 (境界を含む) となり, その面積は,

$$\begin{aligned} \text{図} - \text{図} &= \text{図} - \left(\text{図} - \text{図} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi - \left(\frac{1}{4} \cdot 4\pi - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \right) \\ &= 2 \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$



$$(1) \text{ 各成分について, } \begin{cases} \cos \theta = s \cos \alpha + t \cos \beta \\ \sin \theta = s \sin \alpha + t \sin \beta \end{cases}$$

これを解いて加法定理を用いると $\sin(\beta - \alpha) > 0$ より,

$$s = \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad t = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \begin{cases} 0^\circ \leq \beta - \theta \leq \beta - \alpha < 180^\circ \\ 0^\circ \leq \theta - \alpha \leq \beta - \alpha < 180^\circ \end{cases}$$

より, $\sin(\beta - \theta) \geq 0$, $\sin(\theta - \alpha) \geq 0$ であるから, $s \geq 0$, $t \geq 0$

よって, $\vec{a} \cdot \vec{p} \leq 0$, $\vec{b} \cdot \vec{p} \leq 0$ のとき,

$$\vec{c} \cdot \vec{p} = s\vec{a} \cdot \vec{p} + t\vec{b} \cdot \vec{p} \leq 0 \quad (\text{証明終})$$

$$(3) \text{ 加法定理より, } \vec{a} \cdot \vec{p} = \cos(u - \alpha), \quad \vec{b} \cdot \vec{p} = \cos(u - \beta)$$

$$\text{であるから, } \vec{c} \cdot \vec{p} = s \cos(u - \alpha) + t \cos(u - \beta)$$

θ の値によっては $s > t$ となることもあれば $s < t$ となることもあるから,

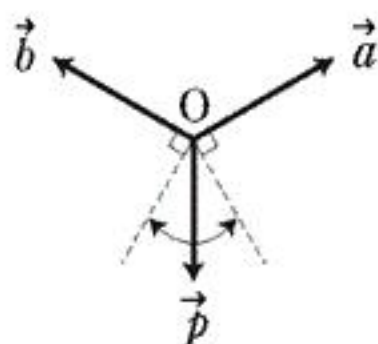
$$\vec{c} \cdot \vec{p} \leq 0 \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \iff \begin{cases} \cos(u - \alpha) \leq 0 \\ \cos(u - \beta) \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 90^\circ + 360^\circ \times n \leq u - \alpha \leq 270^\circ + 360^\circ \times n \\ 90^\circ + 360^\circ \times n \leq u - \beta \leq 270^\circ + 360^\circ \times n \end{cases}$$

よって, $\alpha < \beta$ より,

$$\beta + 90^\circ + 360^\circ \times n \leq u \leq \alpha + 270^\circ + 360^\circ \times n$$

(n は整数) $\dots$ (答)



$$(4) \text{ (3)と同様に } \vec{p} \cdot \vec{q} = \cos(v - u) \text{ により,}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} \leq 0$$

$$\iff u + 90^\circ + 360^\circ \times m \leq v \leq u + 270^\circ + 360^\circ \times m \quad (m \text{ は整数})$$

(3)の u の範囲により, この式の左辺と右辺の動く範囲は,

$$\begin{cases} \beta + 180^\circ + 360^\circ \times (m + n) \leq (\text{左辺}) \leq \alpha + 360^\circ + 360^\circ \times (m + n) \\ \beta + 360^\circ + 360^\circ \times (m + n) \leq (\text{右辺}) \leq \alpha + 540^\circ + 360^\circ \times (m + n) \end{cases}$$

となり,

これらはそれぞれ右図の①, ②の部分を表しているから, (3)で求めたすべての u に対して,

$$\vec{p} \cdot \vec{q} \leq 0$$

$$\iff \alpha + 360^\circ + 360^\circ \times (m + n) \leq v \leq \beta + 360^\circ + 360^\circ \times (m + n)$$

よって, $k = m + n + 1$ とすれば,

$$\alpha + 360^\circ \times k \leq v \leq \beta + 360^\circ \times k \quad (k \text{ は整数}) \quad \dots (\text{答})$$

