

$$(1) \quad f(x) = (x - x^2)e^{-x}$$

$$f'(x) = \{1 - 2x - (x - x^2)\}e^{-x} = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$$

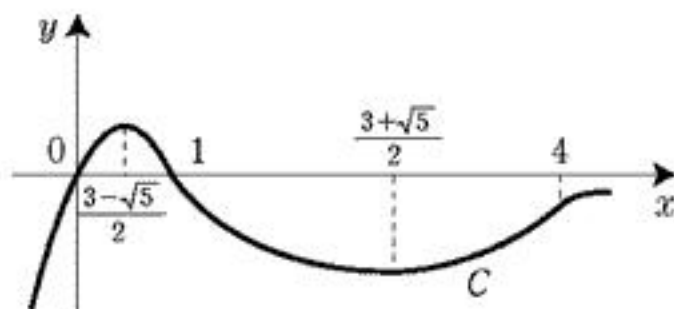
$$f''(x) = \{2x - 3 - (x^2 - 3x + 1)\}e^{-x} = -(x^2 - 5x + 4)e^{-x} \\ = -(x-1)(x-4)e^{-x}$$

より、増減表が得られるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

より、 C の概形は右図のようになる。

x	...	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	...	1	...	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$-12e^{-4}$	$\nearrow$



(2) C 上の点 $(t, f(t))$ における

C の接線は、

$y - f(t) = f'(t)(x - t)$ で表され、これが原点を通るとき、

$$-f(t) = -tf'(t)$$

$$t^3 - 2t = 0$$

$t \neq 0$ より、 $t = 2$ となり、したがって、 $l: y = -\frac{x}{e^2}$ となるから、

C と l で囲まれる図形の面積 S は、

$$S = \int_0^2 \left\{ (x - x^2)e^{-x} + \frac{x}{e^2} \right\} dx$$

となり、部分積分法を用いることにより、

$$S = \left(\frac{7}{e^2} - 1 \right) + \frac{2}{e^2} = \frac{9}{e^2} - 1 \quad \cdots \text{ (答)}$$

$P(x, y)$, $Q(X, Y)$ とすると, $OP \cdot OQ = 3$ より,

$$(x^2 + y^2)(X^2 + Y^2) = 9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, 半直線 OP の傾きについて,

$$\frac{y}{x} = \frac{Y}{X} \quad \cdots \textcircled{2}$$

②を $y = \frac{Y}{X}x$ として①に代入して整理すると,

$$\frac{x^2}{X^2}(X^2 + Y^2)^2 = 9 \quad \therefore x(X^2 + Y^2) = 3X \quad \cdots \textcircled{3}$$

また, $P(x, y)$ は C 上の点だから,

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= r^2 - 1 + 2x \end{aligned}$$

これを①に代入して,

$$(r^2 - 1)(X^2 + Y^2) + 2x(X^2 + Y^2) = 9$$

よって, ③より,

$$(r^2 - 1)(X^2 + Y^2) + 6X = 9$$

となり,

$$T: (r^2 - 1)(x^2 + y^2) + 6x = 9 \quad (r > 0) \quad \cdots \textcircled{4}$$

(1) $r = 1$ のとき, ④より,

$$T: x = \frac{3}{2} \quad \cdots \text{(答)}$$

(2) $r \neq 1$ のとき, ④は,

$$T: \left(x + \frac{3}{r^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{9r^2}{(r^2 - 1)^2}$$

となるから T は円であり,

$$\text{中心} : \left(\frac{3}{1 - r^2}, 0\right), \text{半径} : \frac{3r}{|1 - r^2|} \quad \cdots \text{(答)}$$

(1) 与式より,

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = -1 \quad \therefore \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm i \quad \cdots (\text{答})$$

(2) (1)より,

$\angle A$ が直角の直角二等辺三角形 $\cdots$ (答)

(3) 3 次方程式は少なくとも 1 つの実数解をもつが, (2) で得られた位置関係と, 解が実数でない場合は共役な複素数も解となることから, α は実数で β, γ は共役な複素数であることがわかる。

与式より,

$$(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = -\alpha^2 + 2\beta\gamma \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = k & \cdots \textcircled{3} \\ \alpha\beta\gamma = -20 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

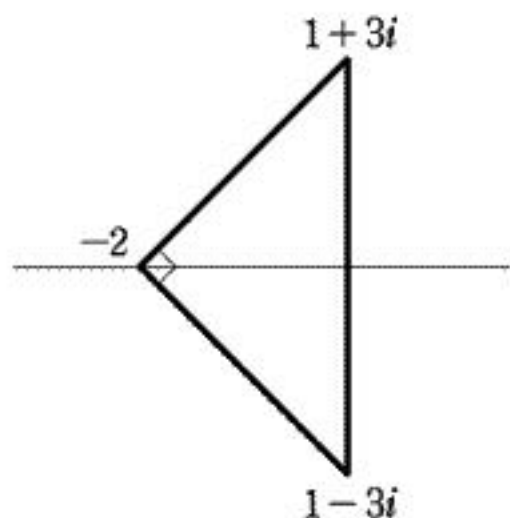
であるから, ②, ④により, ①は

$$4\alpha^2 = -\alpha^2 - \frac{40}{\alpha}$$

$$\alpha^3 = -8 \quad \therefore \alpha = -2$$

したがって, ②, ④より, $\beta + \gamma = 2$, $\beta\gamma = 10$ となり, β, γ は 2 次方程式 $t^2 - 2t + 10 = 0$ の 2 解となる。

$t = 1 \pm 3i$ となるが, 位置関係を考えると β, γ はこのどちらでもよいから, $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 1 \pm 3i, 1 \mp 3i)$ (複号同順) $\cdots$ (答)
また, ③より, $k = \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma = 6 \quad \cdots$ (答)



- (1) $\overrightarrow{AD} = \frac{k}{k-1} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{x}{x+1} \overrightarrow{AC}$ と表せるから,
パラメータ t, s を用いて,

$$\overrightarrow{AQ} = t \overrightarrow{AB} + (1-t) \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = s \overrightarrow{AD} + (1-s) \overrightarrow{AP}$$

$$= \frac{k}{k-1} s \overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+1} (1-s) \overrightarrow{AC}$$

と 2 通りに表せる。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は一次独立だから,

$$\begin{cases} t = \frac{k}{k-1} s \\ 1-t = \frac{x}{x+1} (1-s) \end{cases}$$

これを解いて, $s = \frac{k-1}{k+x}$, $t = \frac{k}{k+x}$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{k}{k+x} \overrightarrow{AB} + \frac{x}{k+x} \overrightarrow{AC}$... (答)

- (2) (1)より, $BQ : BC = x : x+k$ となり,

また, $PC : AC = 1 : x+1$ であるから,

辺 BQ , 辺 BC を底辺と見れば,

$$f(x) = \frac{x}{x+k} \frac{1}{x+1} = \frac{x}{(x+k)(x+1)} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f'(x) &= \frac{(x+k)(x+1) - x(x+1+x+k)}{(x+k)^2 (x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 + k}{(x+k)^2 (x+1)^2} \end{aligned}$$

よって, $f(x)$ は $x = \sqrt{k}$ で最大になる。 ... (答)

(1) C_n の中心を O_n とすると,

$$\overrightarrow{OO_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \theta, \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \theta \right)$$

また, 通過した弧の長さについて,

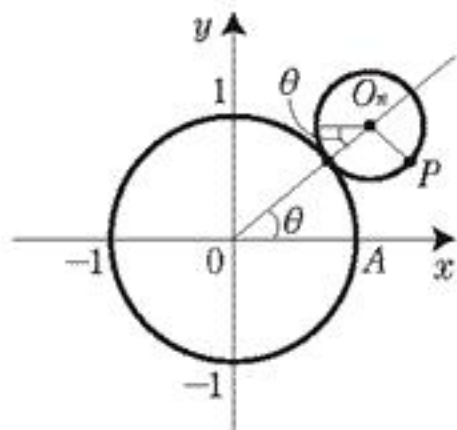
$$\frac{1}{n} \cdot \angle OO_n P = \theta \quad \therefore \angle OO_n P = n\theta$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{O_n P} = \left(\frac{1}{n} \cos(\pi + (n+1)\theta), \frac{1}{n} \sin(\pi + (n+1)\theta) \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{n} \cos(n+1)\theta, -\frac{1}{n} \sin(n+1)\theta \right)$$

となるから, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_n} + \overrightarrow{O_n P}$ より,

$$P \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \theta - \frac{1}{n} \cos(n+1)\theta, \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \theta - \frac{1}{n} \sin(n+1)\theta \right) \quad \dots \text{ (答)}$$



(2) 点 P を $P(x(\theta), y(\theta))$ とすると,

$$\begin{cases} x'(\theta) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) (-\sin \theta + \sin(n+1)\theta) \\ y'(\theta) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) (\cos \theta - \cos(n+1)\theta) \end{cases}$$

となるから,

$$l_n = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos n\theta)} d\theta \quad (\text{加法定理を用いた})$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{n}{2} \theta \right| d\theta = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin \frac{n}{2} \theta d\theta$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n \left[-\frac{2}{n} \cos \frac{n}{2} \theta \right]_0^{\frac{2\pi}{n}} = 8 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \dots \text{ (答)}$$

(3) (2)より, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 8 \quad \dots \text{ (答)}$