

A 1

数 学

(平成 16 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはならない。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を2枚の解答用紙(A 7—1からA 7—2)の3箇所にならず記入しなさい。(1枚目表裏の2箇所、2枚目は表のみ)
4. この冊子には3問題あります。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は手を挙げて監督者に知らせなさい。
5. 解答は必ず解答用紙(A 7—1とA 7—2)の指定箇所(問題番号と一致する番号のところ)に記入しなさい。
6. 下書きにはこの冊子の余白を使用しなさい。
7. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の不等式を証明せよ。

(1) $x > 0, y > 0$ のとき,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

(2) $x > 1, y > 1$ のとき,

$$\left(\log_{10} \frac{x+y}{2} \right)^2 \geq \log_{10} x \cdot \log_{10} y$$

(3) $x > 1$ のとき,

$$\log_x(1+x) > \log_{1+x}(2+x)$$

2 座標平面上で、原点 O と異なる点 $P(x, y)$ に対し、 O を端点とする半直線 OP 上に点 $Q(X, Y)$ を $OP \cdot OQ = 4$ が成り立つようにとるものとする。

(1) X, Y を x, y で表せ。

(2) P が

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

で表される領域を動くとき、 Q の存在する範囲を D とする。 D を不等式で表せ。

(3) (2)で求めた範囲 D を図示し、その面積を求めよ。

3 $\alpha, \beta, \theta, u, v$ は角であり, α, β は $0^\circ < \beta - \alpha < 180^\circ$ を満たす。

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}, \vec{q}$ を次のように定める。

$$\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \vec{b} = (\cos \beta, \sin \beta),$$

$$\vec{c} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{p} = (\cos u, \sin u),$$

$$\vec{q} = (\cos v, \sin v)$$

(1) $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす実数 s, t を α, β, θ で表せ。

(2) $\vec{p}$ が $\vec{a} \cdot \vec{p} \leq 0, \vec{b} \cdot \vec{p} \leq 0$ を満たすとき, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ の範囲のすべての θ に対して, $\vec{c} \cdot \vec{p} \leq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $\alpha \leq \theta \leq \beta$ の範囲のすべての θ に対して, $\vec{c} \cdot \vec{p} \leq 0$ が成り立つような u の範囲を求めよ。

(4) (3)で求めた範囲のすべての u に対して, $\vec{p} \cdot \vec{q} \leq 0$ が成り立つような v の範囲を求めよ。