

(1) C 上の点 (x_0, y_0) での接線の式は $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \cdots \textcircled{1}$ となるから、その傾きが t となるのは

$$\frac{y_0}{b^2} \cdot t = -\frac{x_0}{a^2} \quad \therefore x_0 : y_0 = (-a^2 t) : b^2 \cdots \textcircled{2} \text{ のとき。}$$

ここで、 (x_0, y_0) は C 上の点より、 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \cdots \textcircled{3}$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を解いて、} (x_0, y_0) = \left(\mp \frac{a^2 t}{\sqrt{a^2 t^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 t^2 + b^2}} \right) \quad (\text{複号同順})$$

これを①に代入して整理することで、 l の式は

$$\underline{tx - y \pm \sqrt{a^2 t^2 + b^2} = 0} \quad \cdots (\text{答})$$

(2) (1) の式から、原点と l と距離は

$$\frac{|\pm \sqrt{a^2 t^2 + b^2}|}{\sqrt{t^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{a^2 t^2 + b^2}}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad \cdots (\text{答})$$

(3) まず、 $t \neq 0$ とする。

長方形の一組の対辺は傾きが t の 2 直線なので、

$$(1), (2) \text{ よりその間の距離は、} 2 \cdot \frac{\sqrt{a^2 t^2 + b^2}}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdots \textcircled{4}$$

もう一組の対辺は傾きが $-\frac{1}{t}$ の 2 直線だから、

その間の距離は、③で t を $-\frac{1}{t}$ におきかえて、

$$2 \cdot \frac{\sqrt{a^2 \left(-\frac{1}{t}\right)^2 + b^2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{t}\right)^2 + 1}} = 2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}{\sqrt{1 + t^2}} \cdots \textcircled{5} \text{ である。}$$

題の長方形は横が④、高さが⑤とみなせるので、面積は

$$S(t) = 2 \frac{\sqrt{a^2 t^2 + b^2}}{\sqrt{t^2 + 1}} \times 2 \frac{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}{\sqrt{1 + t^2}} \quad \text{となる。}$$

上式は、 $t=0$ のときの $S(0) = 4ab$ も満たしているので整理して、実数 t に対し、

$$\underline{S(t) = \frac{4\sqrt{(a^2 t^2 + b^2)(b^2 t^2 + a^2)}}{t^2 + 1}} \quad \cdots (\text{答})$$

$$(4) \quad F(T) = \frac{(a^2 T + b^2)(b^2 T + a^2)}{(T+1)^2} \quad (\text{ただし、} T \geq 0) \text{ とおくと、}$$

$T = t^2$ のもとで、 $S(t) = 4\sqrt{F(T)} \cdots \textcircled{6}$ である。 $F(T)$ の増減を調べる。

$$\begin{aligned} F'(T) &= \frac{\{(a^2 T + b^2)(b^2 T + a^2)\}'(T+1)^2 - (a^2 T + b^2)(b^2 T + a^2) \cdot 2(T+1)}{(T+1)^4} \\ &= \frac{(2a^2 b^2 T + (a^2 + b^2))(T+1) - 2(a^2 T + b^2)(b^2 T + a^2)}{(T+1)^3} \\ &= \frac{-(a^2 - b^2)^2(T-1)}{(T+1)^3} \quad \text{であるので、} \end{aligned}$$

$a \neq b (\therefore a^2 - b^2 \neq 0)$ より $F(T)$ の増減は以下のよう。

T	0		1		(∞)
$F'(T)$		+	0	-	
$F(T)$	$a^2 b^2$	増加	$\frac{(a^2 + b^2)^2}{4}$	減少	$(a^2 b^2)$

$$[\lim_{T \rightarrow \infty} F(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left(a^2 + \frac{b^2}{T}\right)\left(b^2 + \frac{a^2}{T}\right)}{\left(1 + \frac{1}{T}\right)^2} = a^2 b^2]$$

従って $F(T)$ の値の範囲は、

$$a^2 b^2 \leq F(T) \leq \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} \cdots \textcircled{7} \quad \text{とわかる。}$$

以上⑥、⑦より、 $S(t)$ の値の範囲は、

$$\underline{4ab \leq S(t) \leq 2(a^2 + b^2)} \quad \cdots (\text{答})$$

(1)(2) 題意を満たす分数は、

ア. $\frac{q}{p^n}$ (q は $1 \leq q \leq p^n - 1$ を満たす整数) の中で、

イ. 既約分数でないものを除いたもの。

ここで、イ.において、

$\frac{q}{p^n}$ が既約分数でない

$\Leftrightarrow q$ と p^n が 1 より大きい公約数を持つ

$\Leftrightarrow q$ が p の倍数である…①

(p が素数であることから)

であるから、結局求める和は、

全体の和 $\frac{1}{p^n} + \frac{2}{p^n} + \dots + \frac{p^n - 1}{p^n}$ …② から

①の分数の和 $\frac{p}{p^n} + \frac{2p}{p^n} + \dots + \frac{(p^{n-1} - 1)p}{p^n}$ …③

を引いたものである。

ここで、等差数列の和を計算して

$$\textcircled{2} = \frac{1}{2}(p^n - 1) \left\{ \left(\frac{p^n - 1}{p^n} \right) + \left(\frac{1}{p^n} \right) \right\} = \frac{p^n - 1}{2}$$

$$\textcircled{3} = \frac{1}{2}(p^{n-1} - 1) \left\{ \left(\frac{p^n - p}{p^n} \right) + \left(\frac{p}{p^n} \right) \right\} = \frac{p^{n-1} - 1}{2}$$

であるから、

$$S_n = \frac{p^n - p^{n-1}}{2} \quad \dots \quad (\text{答})$$

$n = 1, 2, 3$ として、

$$S_1 = \frac{p-1}{2}, \quad S_2 = \frac{p^2-p}{2}, \quad S_3 = \frac{p^3-p^2}{2} \dots (\text{答})$$

(1) l の式は、 $y = t\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{25}{8}$ より、 α, β は

$$x^2 = t\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{25}{8} \quad \therefore x^2 - tx + \left(\frac{1}{2}t - \frac{25}{8}\right) = 0 \quad \text{の 2 解。}$$

解と係数の関係から、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = t \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}t - \frac{25}{8} \end{cases} \quad \dots \quad (\text{答})$$

(2) 等積変形をすることで、立体の体積を

高さが PQ 、底面の半径が R と l の距離の円錐の体積…①
に帰着することができる。

よって、体積が最大になるのは、

R と l の距離が最大になるときで、図形的に考えてそれは
 R での接線が、 l と平行 ($\Leftrightarrow$ 傾き t) である…② とき。

$(x^2)' = 2x$ より、②となるのは

$$2\gamma = t \quad \therefore \gamma = \frac{t}{2} \text{ のとき。}$$

このとき、①において、

$R\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right)$ と $l: y = t\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{25}{8}$ の距離は

$$\frac{\left|t\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{25}{8} - \frac{t^2}{4}\right|}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\left|t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right|}{4\sqrt{t^2 + 1}}$$

PQ の長さは

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (t\beta - t\alpha)^2} = \sqrt{t^2 + 1}(\beta - \alpha) \\ & = \sqrt{t^2 + 1}\sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta} \\ & = \sqrt{t^2 + 1}\sqrt{t^2 - 4\left(\frac{1}{2}t - \frac{25}{8}\right)} = \sqrt{t^2 + 1}\sqrt{t^2 - 2t + \frac{25}{2}} \end{aligned}$$

((1)より)

である。従って、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\left|t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right|}{4\sqrt{t^2 + 1}} \right)^2 \cdot \sqrt{t^2 + 1}\sqrt{t^2 - 2t + \frac{25}{2}} \\ &= \frac{\pi}{48} \frac{\left(t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad \dots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)(2)で、全て正なので対数をとって、

$$\log V = \log \frac{\pi}{48} + \frac{5}{2} \log\left(t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right) - \frac{1}{2} \log(t^2 + 1)$$

である。この両辺を微分して

$$\frac{V'}{V} = \frac{5}{2} \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + \frac{25}{2}} - \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 + 1} \quad \dots \text{③}$$

③の右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{8t^3 - 6t^2 - 15t - 10}{2\left(t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right)(t^2 + 1)} = \frac{(t - 2)(8t^2 + 10t + 5)}{2\left(t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right)(t^2 + 1)} \\ & = \frac{8\left(t + \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{8}}{2\left(t^2 - 2t + \frac{25}{2}\right)(t^2 + 1)} \times (t - 2) \end{aligned}$$

となるので、③より V の増減は下のよう。

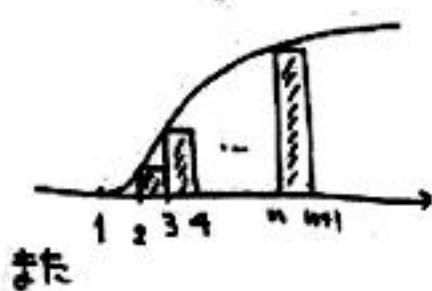
t		2	
V'	—	0	+
V	減少	(最小)	増加

よって V が最小になるときの t の値は

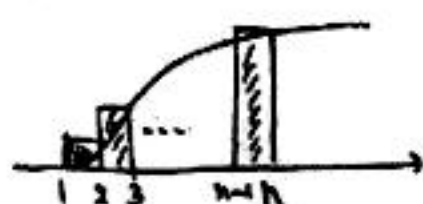
$$t = \underline{2} \quad \dots \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 4(1) \quad \int (\log x)^2 dx &= [x(\log x)^2] - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\
 &= \underline{x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C} \quad (C: \text{積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) $(\log x)^2$ は $x \geq 1$ で単調増加である。



$$\text{より} \quad \sum_{k=1}^n (\log k)^2 < \int_1^{n+1} (\log x)^2 dx$$



$$\text{より} \quad \int_1^n (\log x)^2 dx < \sum_{k=1}^n (\log k)^2$$

$$\therefore \underbrace{\int_1^n (\log x)^2 dx}_{B_n \text{ と表す}} < \sum_{k=1}^n (\log k)^2 < \underbrace{\int_1^{n+1} (\log x)^2 dx}_{C_n \text{ と表す}}$$

$$B_n = n(\log n)^2 - 2n \log n + 2n - 2$$

$$C_n = (n+1) \{ \log(n+1) \}^2 - 2(n+1) \log(n+1) + 2n$$

==>

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n(\log n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\log n} + \frac{2}{(\log n)^2} - \frac{2}{n(\log n)^2} \right\} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n(\log n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left\{ \frac{\log(n+1)}{\log n} \right\}^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{\log n} + \frac{2}{(\log n)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

==>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) + \log n}{\log n} = 1$$

に注意して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n(\log n)^2} = 1$$

したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n(\log n)^2} = 1$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{3n}}{A_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{3n}}{3n(\log 3n)^2} \cdot \frac{2n(\log 2n)^2}{A_{2n}} \cdot \frac{3}{2} \frac{(\log 3n)^2}{(\log 2n)^2}$$

==>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3n}{\log 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + \log n}{\log 2 + \log n} = 1$$

より

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{3n}}{A_{2n}} &= \frac{3}{2} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{3n}}{3n(\log 3n)^2}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(\log 2n)^2}{A_{2n}}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log 3n)^2}{(\log 2n)^2}}_1 \\
 &= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

5 (1). $x = \frac{\pi}{2}$ と (7)

$$x \leq \tan x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \quad \dots \textcircled{1}$$

を示す.

$$f(x) = \tan x - x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

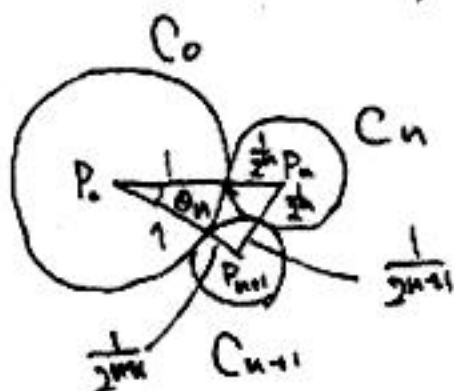
と置く

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$$

より $f(x)$ は単調増加で $f(0) = 0 \therefore f(x) \geq 0$

したがって (1) が示され、問題が示される.

(2) (a), (b) より C_0, C_n, C_{n+1} の位置関係は以下のおよそ
余弦定理により.



$$\begin{aligned} \cos \theta_n &= \frac{(1 + \frac{1}{2^n})^2 + (1 + \frac{1}{2^{n+1}})^2 - (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}})^2}{2 \cdot (1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{2^{n+1}})} \\ &= 1 - \frac{2}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)} \end{aligned}$$

(3) (2) より $\cos \theta_n > 0$ より θ_n は鋭角に注意すると

$$\tan \frac{\theta_n}{2} = \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\cos \frac{\theta_n}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \theta_n}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_n}{1 + \cos \theta_n}}$$

$\therefore$ (2) より

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta_n}{2} &= \sqrt{\frac{\frac{2}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}}{2 - \frac{2}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{2n+1} + 2^{n+1} + 2^n}} \\ &= \frac{1}{2^n \sqrt{2 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}}} \leq \frac{1}{2^n \sqrt{2}} // \end{aligned}$$

(4) (1), (3) より

$$\frac{1}{2} \theta_k \leq \tan \frac{\theta_k}{2} \leq \frac{1}{2^k \sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \theta_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k \sqrt{2}} \quad \therefore \sum_{k=1}^n \theta_k \leq \frac{2}{\sqrt{2}} (1 - (\frac{1}{2})^n) \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$$

となり、問題を得る //