

A 2

数 学

(平成 17 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を 3 枚の解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の 5 箇所(記入欄)に必ず記入しなさい。(1 枚目、2 枚目は表裏の 2 箇所、3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし, a, b を異なる正の定数とする。 C に接し, 傾き t の直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) 原点と l の距離を求めよ。

(3) C に外接する長方形の 1 辺の傾きが t であるとき, この長方形の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ を求めよ。

(4) t がすべての実数を動くとき, (3) で得られた $S(t)$ の値の範囲を求めよ。

2 p を素数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, p^n を分母とする既約分数で, 0 より大きく 1 より小さいものの総和を S_n とする。次の問いに答えよ。

(1) S_1, S_2, S_3 を求めよ。

(2) S_n を求めよ。

3 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$ を通る傾き t の直線 l と曲線 $C: y = x^2$ の 2 交点を $P(a, a^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ ($a < \beta$) とする。 C 上に点 $R(\gamma, \gamma^2)$ ($a < \gamma < \beta$) をとり, $\triangle PQR$ を l のまわりに 1 回転してできる立体を考える。 R を動かすとき, この立体の体積の最大値を V とする。 次の問いに答えよ。

(1) $a + \beta, a\beta$ を t の式で表せ。

(2) V を t の式で表せ。

(3) t がすべての実数を動くとき, V を最小にする t の値を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^n (\log k)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n(\log n)^2}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ を求めよ。

5 平面上に半径 $\frac{1}{2^n}$ の円 $C_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ があり、次の条件をみたしている。

(a) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 C_0 と C_n は外接する。

(b) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 C_n と C_{n+1} は外接する。

C_n の中心を P_n とし、 $\angle P_n P_0 P_{n+1}$ を $\theta_n (0 < \theta_n < \pi)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $\frac{1}{2} \theta \leq \tan \frac{\theta}{2}$ であることを示せ。

(2) $\cos \theta_n$ を n の式で表せ。

(3) $\tan \frac{\theta_n}{2} \leq \frac{1}{2^n \sqrt{2}}$ であることを示せ。

(4) $\sum_{k=1}^n \theta_k \leq \sqrt{2}$ であることを示せ。