

A 3

数 学

(平成 17 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を 2 枚の解答用紙(A 9—1 と A 9—2)の 3 箇所(記入欄)に必ず記入しなさい。(1 枚目表裏の 2 箇所, 2 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3 があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙(A 9—1 と A 9—2)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし, a, b を異なる正の定数とする。 C に接し, 傾き t の直線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) 原点と ℓ の距離を求めよ。

(3) C に外接する長方形の 1 辺の傾きが t であるとき, この長方形の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ を求めよ。

(4) t がすべての実数を動くとき, (3) で得られた $S(t)$ の値の範囲を求めよ。

2 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$ を通る傾き t の直線 ℓ と曲線 $C: y = x^2$ の2交点を $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$)とする。 C 上に点 $R(\gamma, \gamma^2)$ ($\alpha < \gamma < \beta$)をとり、 $\triangle PQR$ を ℓ のまわりに1回転してできる立体を考える。 R を動かすとき、この立体の体積の最大値を V とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ を t の式で表せ。

(2) V を t の式で表せ。

(3) t がすべての実数を動くとき、 V を最小にする t の値を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^n (\log k)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n (\log n)^2}$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{a_{2n}}$ を求めよ。