

(1) $\angle AOB = \theta$ とおくと、余弦定理より、

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

である。従って、 $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ を得る。よって、求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

(2) $s + t = k$ とおいて、 $1 \leq k \leq 2$ となる k を 1 つ固定する。このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{k} \cdot k\overrightarrow{OA} + \frac{t}{k} \cdot k\overrightarrow{OB}$$

であり、 $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$ 、 $\frac{s}{k}, \frac{t}{k} \geq 0$ なので、 P は $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$ となる A_1 と B_1 を通る線分を描く。 $1 \leq k \leq 2$ の範囲で k を動かすと、問題の条件を満たす P の範囲は下のようになる。

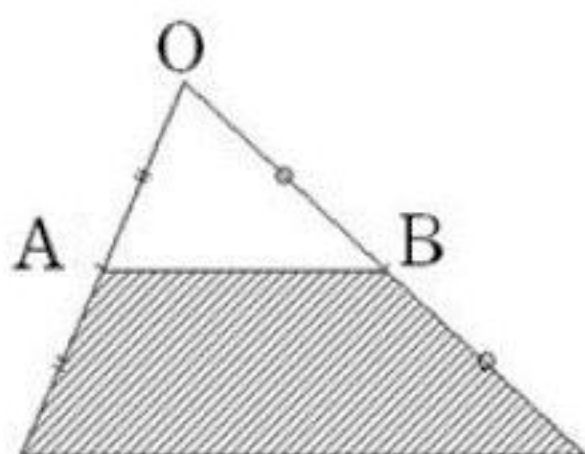


図 1

よって、求める面積は $6\sqrt{6}(2^2 - 1) = 18\sqrt{6}$

である。

(3) $s + t = l$ とおいて、 $1 \leq l \leq 2$ となる l を 1 つ固定する。このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2s}{l} \cdot \frac{l}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{l} \cdot l\overrightarrow{OB}$$

であり、 $\frac{2s}{l} + \frac{t}{l} = 1$ 、 $\frac{2s}{l}, \frac{t}{l} \geq 0$ なので、 P は $\overrightarrow{OA_2} = \frac{l}{2}\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB_2} = l\overrightarrow{OB}$ となる A_2 と B_2 を通る線分を描く。 $1 \leq l \leq 2$ の範囲で l を動かすと、 $1 \leq 2s + t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$ を満たす P の範囲は右のようになる。

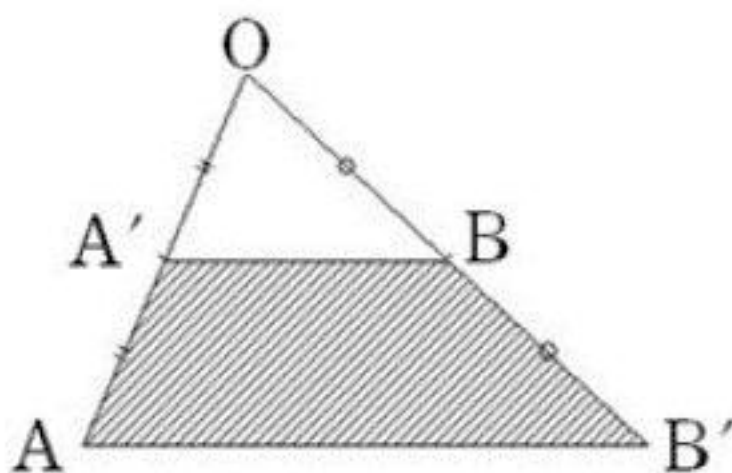


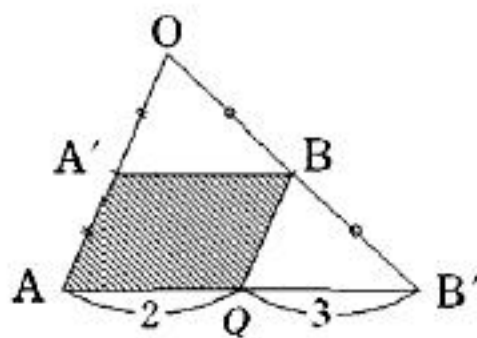
図 2

一方、 $s + 3t = m$ とおいて、 $0 \leq m \leq 3$ となる m を 1 つ固定する。このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{m} \cdot m\overrightarrow{OA} + \frac{3t}{m} \cdot \frac{m}{3}\overrightarrow{OB}$$

であり、 $\frac{s}{m} + \frac{3t}{m} = 1$ 、 $\frac{s}{m}, \frac{3t}{m} \geq 0$ なので、 P は $\overrightarrow{OA_3} = m\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB_3} = \frac{m}{3}\overrightarrow{OB}$ となる A_3 と B_3 を通る線分を描く。 $0 \leq k \leq 3$ の範囲で k を動かすと、結局、問題の条件を満たす P のとりうる範囲は右下のようになる。よって、 $AQ : A'B : AB' = 4 : 5 : 10$ であることから、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \triangle A'AB + \triangle ABQ \\ &= \frac{1}{2}\triangle OAB + \frac{4}{10}\triangle ABB' \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right)\triangle OAB \\ &= \frac{27\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$



(1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2 + (x-2)|x-1|$ とおく。

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 4 & (x \geq 1) \\ x^2 & (x < 1) \end{cases}$$

である。一方、 ℓ は $a(x-1) + (1-y) = 0$ と変形できるので、必ず定点 $(1, 1)$ を通る。以下、 a の値で場合分けする。

$a \geq 2$ のとき このとき、 $x \leq 1$ において C は ℓ の上側にあるので、 $x < 1$ の範囲を考えればよい。 $y = 3x^2 - 6x + 4$ と $y = ax - a + 1$ との交点の x 座標は、 $(x-1)(3x-3-a) = 0$ より、 $x = 1, \frac{3+a}{3}$ である。よって、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^{\frac{3+a}{3}} \{ax - a + 1 - (3x^2 - 6x + 4)\} dx \\ &= -3 \int_1^{\frac{3+a}{3}} (x-1) \left(x - \frac{a+3}{3}\right) dx \\ &= \frac{a^3}{54} \end{aligned}$$

である。

$0 < a \leq 2$ のとき このとき、 C と ℓ の交点の x 座標は、 $x \geq 1$ では、 $x^2 = ax - a + 1$ より、 $x = 1, a-1$ とわかる。よって、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^{\frac{3+a}{3}} -3(x-1) \left(x - \frac{a+3}{3}\right) dx + \int_{a-1}^1 -(x-1)(x-a+1) dx \\ &= \frac{a^3}{54} + \frac{(2-a)^3}{6} \end{aligned}$$

$a \leq 0$ のとき このとき、 $x \geq 1$ で C は ℓ よりも上にあるので、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{a-1}^1 -(x-1)(x-a+1) dx \\ &= \frac{(2-a)^3}{6} \end{aligned}$$

である。

よって、

$$S(a) = \begin{cases} \frac{a^3}{54} & (a \geq 2) \\ \frac{a^3}{54} + \frac{(2-a)^3}{6} & (0 \leq a < 2) \\ \frac{(2-a)^3}{6} & (a < 0) \end{cases}$$

(2) $a \geq 2$ では $S'(a) = \frac{a^2}{18} > 0$ なので $S(a)$ は単調増加する。一方 $a < 0$ では $S'(a) = -\frac{1}{2}(2-a)^2 < 0$ なので $S(a)$ は単調減少する。よって、最小値をとるのは $0 \leq a < 2$ のときである。このとき、

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{a^2}{18} - \frac{1}{2}(2-a)^2 \\ &= \frac{2}{9}(2a-3)(3-a) \end{aligned}$$

である。従って、 $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$ であるから、増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$S'(a)$	-	-	0	+	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、 $S(a)$ は $a = \frac{3}{2}$ で最小値をとり、最小値は $S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{12}$ である。

(1) 条件

$$(3n^2 + 3n - 1)S_n = 5T_n \cdots (*)$$

において、 $n = 1$ とおくと、 $a_1 = a_1^2$ となり、 $a_1 > 0$ より、 $a_1 = 1$ である。

次に $(*)$ で $n = 2$ とおくと、 $17(a_2 + 1) = 5(a_2^2 + 1)$ より、 $(5a_2 + 3)(a_2 - 4) = 0$ となり、 $a_2 = 4$ を得る。さらに、 $(*)$ で $n = 3$ とおくと、 $35(1 + 4 + a_3) = 5(1 + 16 + a_3^2)$ なので、これを解いて $a_3 = 9$ である。

(2)(1) より、 $a_n = n^2$ という予測ができる。これを n についての数学的帰納法で証明する。

1. $n = 1$ のときは (1) から成立する。
2. $n = k (\geq 2)$ までのすべての自然数について $a_k = k^2$ となったとする。このとき、条件式 $(*)$ において、 $n = k, k + 1$ とおいた式を辺々引くと、

$$\begin{aligned} 5a_{k+1}^2 &= (3k^2 + 9k + 5) \left(\sum_{l=1}^k l^2 + a_{k+1} \right) - (3k^2 + 3k - 1) \sum_{l=1}^k l^2 \\ &= 6(k+1) \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (3k^2 + 9k + 5)a_{k+1} \end{aligned}$$

より、

$$\{a_{k+1} - (k+1)^2\} \{5a_{k+1} + k(2k+1)\} = 0$$

を得るが、 $a_{k+1} > 0$ より、 $a_{k+1} = (k+1)^2$ である。

以上より、すべての自然数 n について $a_n = n^2$ であることが示された。

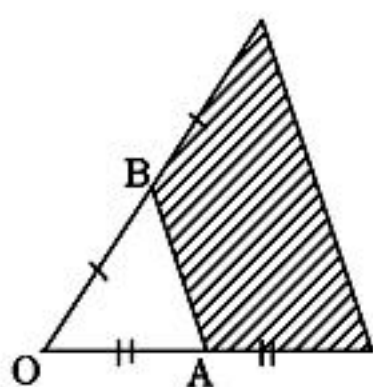


図1 1(2)の図

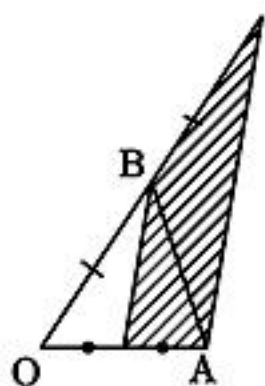


図2 1(3)の図

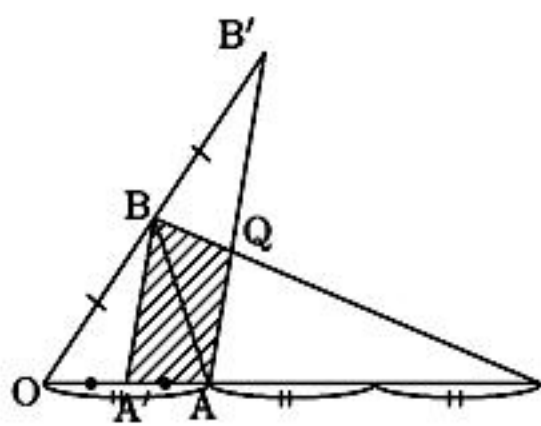


図3 1(3)の図 (条件を満たす領域)

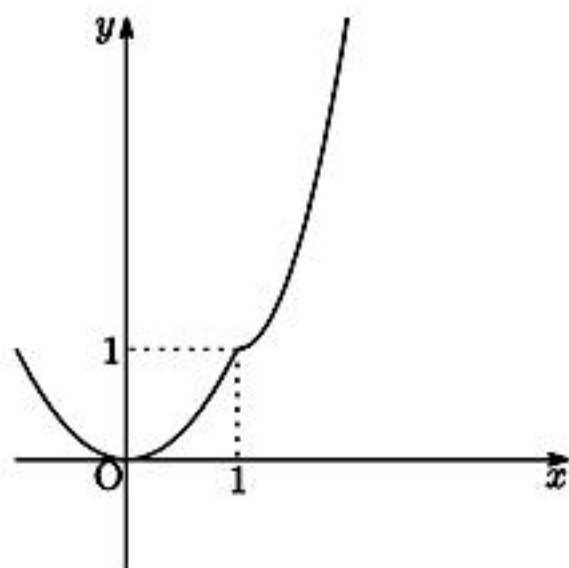


図4 2の図