

1

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x(\log x)^2 dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' (\log x)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{2 \log x}{x} dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \log x dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \int_1^e \frac{x}{2} dx \\
 &= \frac{e^2 - 1}{4}
 \end{aligned}$$

(答) $\frac{e^2 - 1}{4}$

(2)

$t = \tan x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ であるから,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + 3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt \quad \cdots (\ast)
 \end{aligned}$$

となる。ここでさらに, $t = \sqrt{3} \tan \theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta}$ であり, t が 0 から 1 へ変化す

るとき, θ は, 0 から $\frac{\pi}{6}$ へ変化するから,

$$\begin{aligned}
 (\ast) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 \theta}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} d\theta \\
 &= \frac{\pi \sqrt{3}}{18}
 \end{aligned}$$

(答) $\frac{\pi \sqrt{3}}{18}$

2

(1)

$$f'(x) = \frac{a}{x+1} - \frac{1-a}{1-x} = \frac{-x+2a-1}{1-x^2} \text{ であるから, } f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2a-1 \text{ である. したがって, 増}$$

減表は下のようになる。

x	-1	$\cdots$	$2a-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって, $f(x)$ は $x=2a-1$ で極大値 $a \log a + (1-a) \log(1-a) + \log 2$ をとる。また,

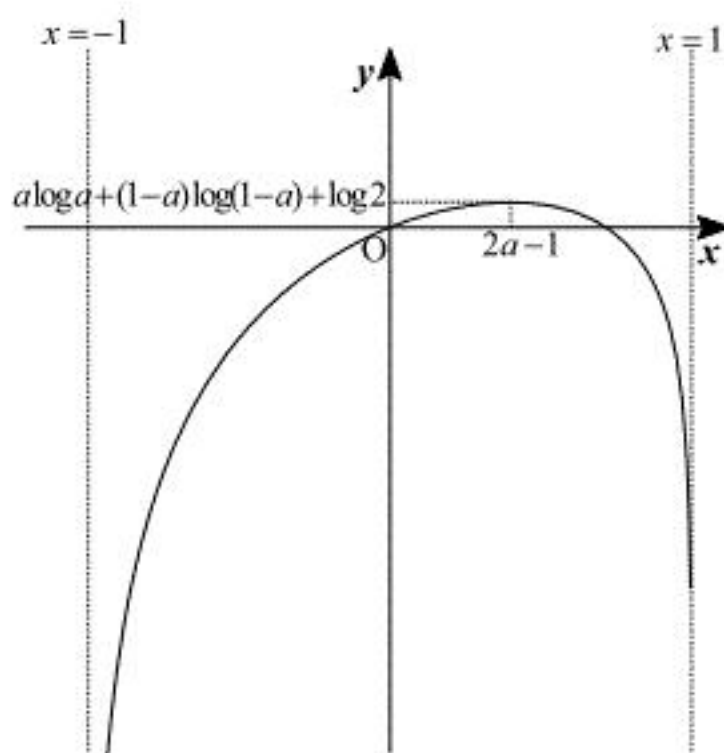
$$f''(x) = -\frac{\{x-(2a-1)\}^2 - 4(a^2-a)}{(x^2-1)^2} \text{ なので, } a-a^2 > 0 \text{ より, } -1 < x < 1 \text{ において } f''(x) < 0 \text{ であ}$$

るから, 上に凸である。さらに,

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty$$

なので, グラフの概形は以下のようになる。



(答)左図

(2)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ であればよいので, } a \log \frac{3}{2} + (1-a) \log \frac{1}{2} = 0 \text{ より, } a = \frac{\log 2}{\log 3} \text{ である.}$$

$$(答) \ a = \frac{\log 2}{\log 3}$$

(3)

$$\{\pm(1 \pm x) \log(1 \pm x) - x\}' = \log(1 \pm x) \text{ であることに注意して,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \{a \log(x+1) + (1-a) \log(1-x)\} dx &= \left[a \{(x+1) \log(x+1) - x\} + (1-a) \{(x-1) \log(1-x) - x\} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= a \left(\frac{3}{2} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + (1-a) \left(-\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= a \left(\frac{3}{2} \log 3 - 2 \log 2 \right) + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ここに } a = \frac{\log 2}{\log 3} \text{ を代入して, 求める面積は, } 2 \log 2 \left(1 - \frac{\log 2}{\log 3} \right) - \frac{1}{2} \text{ である.}$$

$$(答) \ 2 \log 2 \left(1 - \frac{\log 2}{\log 3} \right) - \frac{1}{2}$$

3

(1)

原点と直線 ℓ との距離は k なので、 PQ の長さは $2\sqrt{2-k^2}$ である。 PQ を底辺と考えると、
 三角形 APQ の高さは A と直線 ℓ との間の距離だから、求める面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{|3\sin\theta-k|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\cdot2\sqrt{2-k^2}=|3\sin\theta-k|\sqrt{2-k^2}$$

である。

(答) $|3\sin\theta-k|\sqrt{2-k^2}$

(2)

$0\leq\theta<2\pi$ であるから、 $\sin\theta=-1$ のとき、つまり、 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ のときに $|3\sin\theta-k|$ は最大値 $3+k$ を取る。
 よって、 $f(k)=(3+k)\sqrt{2-k^2}$ である。

(答) $(3+k)\sqrt{2-k^2}$

(3)

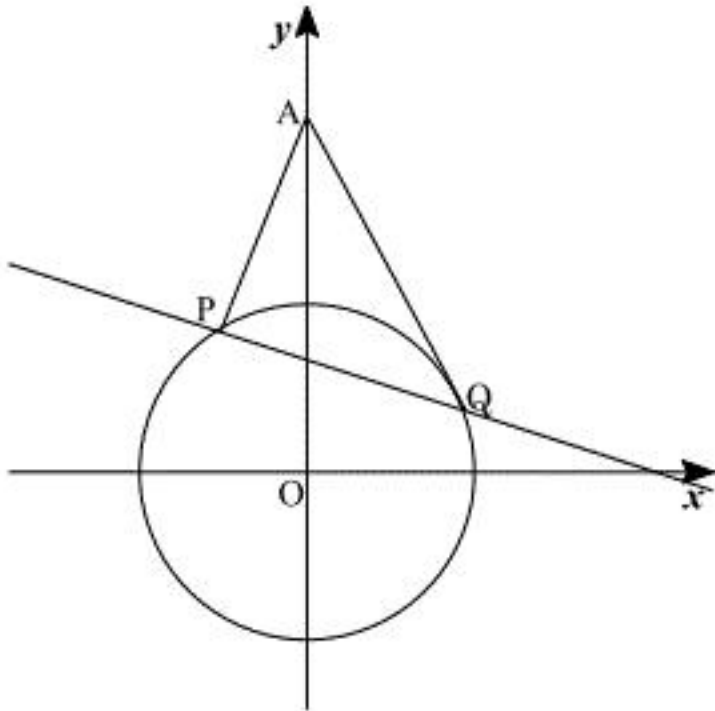
$g(k)=\{f(k)\}^2$ とおくと、 $g(k)$ が最大となるとき、 $f(k)$ も最大になる。

$g'(k)=-2(k+3)(2k-1)(k+2)$ であるから、 $g'(k)=0\Leftrightarrow k=-3,-2,\frac{1}{2}$ となる。このなかで、
 $k=-3,-2$ は k の範囲にないので不適。よって、増減表は以下ようになる。

k	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\sqrt{2}$
$g'(k)$	+	+	0	-	-
$g(k)$		↗	極大	↘	

よって、求める k は $k=\frac{1}{2}$ である。

(答) $\frac{1}{2}$



(1)

(t, t^n) を点 P とおくと、点 P から直線 $y=x$ までの距離は、点と直線の距離の関係より、

$\frac{\sqrt{2}}{2}(t-t^n)$ となる。点 (t, t) を Q とおいて、H を P から直線 $y=x$ に引いた垂線の足、 l を線

分 OH の長さとする、 $l = OQ - QH = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+t^n)$ と求まるから、

$$\begin{aligned} V_n &= \int_0^1 \pi \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(x-x^n) \right\}^2 dl \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{2}(x-x^n)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+nx^{n-1}) dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \int_0^1 \left\{ (x-x^n)^2 (1-nx^{n-1}) + 2n(x^{n+1} + 2x^{2n} + x^{3n+1}) \right\} dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{6n}{(n+2)(2n+1)} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{6n}{(n+2)(2n+1)} \right)$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi$$

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi$$

5

(1)

下の図より、面積 S は $\cos \alpha = a \sin \alpha$ なる α をとると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\alpha} (\cos x - a \sin x) dx \\ &= \sin \alpha + a \cos \alpha - a \end{aligned}$$

となる。これと、 $\cos \alpha = a \sin \alpha$ から、 $\cos \alpha$ と $\sin \alpha$ を S と a とで書くと、

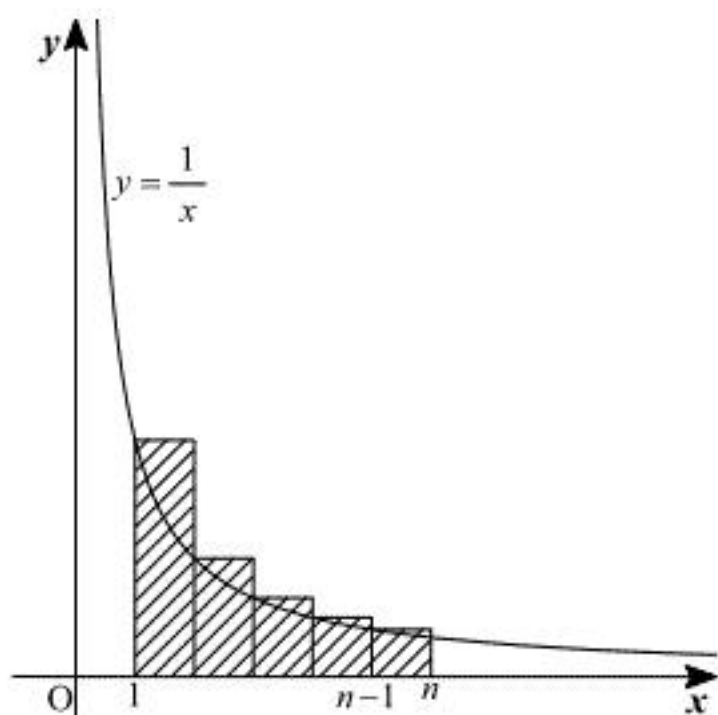
$$\cos \alpha = \frac{a(S+a)}{a^2+1}, \sin \alpha = \frac{S+a}{a^2+1}$$

となる。 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ なので、

$$\frac{(S+a)^2}{a^2+1} = 1$$

より、 $a = \frac{1-S^2}{2S}$ を得る。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1-S^2}{2S}$$



(2)

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$$

なので、これを $k=1, 2, \dots, n-1$ と動かして辺々加えると、

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

なので、左側の不等式より

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n + 1$$

であり、右側の不等式より、

$$\log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

を得る。以上で問題の不等式を得る。

(証明終)

(3)

(1)より、 $a_k = \frac{n}{2k} - \frac{k}{2n}$ である。よって、

$$E_n = \frac{1}{n-1} \left(\frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} k \right)$$

となる。(2)の不等式より、

$$\frac{n}{2(n-1)} \log n - \frac{1}{4} \leq E_n < \frac{n}{2(n-1)} (1 + \log n) - \frac{1}{4}$$

であるから、

$$\frac{n}{2(n-1)} - \frac{1}{4 \log n} \leq \frac{E_n}{\log n} < \frac{n}{2(n-1)} \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) - \frac{1}{4 \log n}$$

である。この不等式の両側は $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{2}$ に収束するので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$