A 2

数　　学

（平 成 18 年 度）

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を３枚の解答用紙（Ａ７―１からＡ７―３）の５箇所の記入欄に必ず記入しなさい。（１枚目，２枚目は表裏の２箇所，３枚目は表のみ）
4. この問題冊子には，問題１，２，３，４，５があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙（Ａ７―１からＡ７―３）の指定箇所（問題番号と一致するところ）に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後，問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e x(\log x)^2 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

2 a を $\frac{1}{2} < a < 1$ を満たす定数とする。関数

$$f(x) = a\log(1+x) + (1-a)\log(1-x) \qquad (-1 < x < 1)$$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減，凹凸を調べ，C の概形を描け。

(2) C と x 軸が $x = \frac{1}{2}$ で交わるとき，a の値を求めよ。

(3) (2)で求めた a に対し，C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

3 xy 平面上に，定点 A$(0,\ 3)$，直線 $\ell : (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = k$ および円 $C : x^2 + y^2 = 2$ がある。ただし，$0 \leqq k < \sqrt{2}$，$0 \leqq \theta < 2\pi$，$3\sin\theta \neq k$ とする。ℓ と C の 2 交点を P，Q とし，△APQ の面積を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1) S を k，θ で表せ。

(2) k を固定し，θ を動かしたときの S の最大値を $f(k)$ とする。$f(k)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $f(k)$ を最大にする k の値を求めよ。

4 xy 平面上の $x \geqq 0$ の範囲で，直線 $y = x$ と曲線 $y = x^n$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ により囲まれる部分を D とする。D を直線 $y = x$ のまわりに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) V_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \to \infty} V_n$ を求めよ。

5 a を正の数とするとき，2 曲線 $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=a\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) a を S で表せ。

(2) n を 2 以上の整数とするとき

$$\log n \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqq 1+\log n$$

であることを示せ。

(3) 2 以上の整数 n に対し，E_n を次のように定める。

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ の各 k に対し，$S=\dfrac{k}{n}$ のときの a を a_k とおき，

$E_n=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ とする。

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{\log n}$$

を求めよ。