

(1)

$$\begin{cases} \log_{2x} y + \log_x 2y = 1 & \dots \textcircled{1} \\ \log_2 xy = 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

真数及び底の条件より,

$$x > 0, x \neq 1, \frac{1}{2}, y > 0 \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ. ①の左辺を2を底とする対数に変換すると,

$$\begin{aligned} \log_{2x} y + \log_x 2y &= \frac{\log_2 y}{\log_2 2x} + \frac{\log_2 2y}{\log_2 x} \\ &= \frac{\log_2 y}{\log_2 x + 1} + \frac{\log_2 y + 1}{\log_2 x} \end{aligned}$$

となるので, $\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とすれば, ①, ②は,

$$\begin{cases} \frac{Y}{X+1} + \frac{Y+1}{X} = 1 & \dots \textcircled{1}' \\ X+Y = 1 & \dots \textcircled{2}' \end{cases}$$

と置換できる. ②'より $Y = 1 - X$ であるから, これを ①'に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{1-X}{1+X} + \frac{2-X}{X} &= 1 \\ \frac{2}{1+X} + \frac{2}{X} - 2 &= 1 \\ \frac{2}{1+X} + \frac{2}{X} &= 3 \\ 2 + 4X &= 3X + 3X^2 \\ 3X^2 - X - 2 &= 0 \\ (3X+2)(X-1) &= 0 \end{aligned}$$

を得る. 故に $X = -\frac{2}{3}, 1$ である.

$X = -\frac{2}{3}$ のとき, $Y = \frac{5}{3}$ であるから, $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 2\sqrt[3]{4}\right)$ である.
 $X = 1$ のとき, $Y = 0$ であるから, $(x, y) = (2, 1)$ である.
 以上の解はすべて ③を満たす.

(2)

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \dots \textcircled{1}$$

と変形できる.

ここで, $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと, $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ なので, $\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$ である. これらを ①に代入して,

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

を得る. 従って, 問題の条件より,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t &= \frac{13}{27} \\ t^3 - 3t + \frac{26}{27} &= 0 \\ \left(t - \frac{1}{3}\right) \left(t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{26}{9}\right) &= 0 \end{aligned}$$

である. これを解くと, $t = \frac{1}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{105}}{6}$ を得るが, $t = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ であるので, $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ だから, これを満たす解は $t = \frac{1}{3}$ のみである.

このとき, $\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$ である. よって, $\sin \theta, \cos \theta$ はすべて $\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{4}{9} = 0$ の解である. この方程式の解は $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$ であり, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ なので, $\cos \theta < 0$ であることに注意すれば, $\sin \theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{6}$, $\cos \theta = \frac{1 - \sqrt{17}}{6}$ を得る.

(1)

点 (X, Y) が C_2 上にあることと、 (X, Y) を $\left(a, \frac{2}{3}a^2 + 1\right)$ に対して対称移動した点が C_1 上にあることは同値である。

(X, Y) を $\left(a, \frac{2}{3}a^2 + 1\right)$ に対して対称移動した点は、

$$\left(2a - X, \frac{4}{3}a^2 + 2 - Y\right)$$

である。これが、 $y = x^2$ 上にあるので、

$$\frac{4}{3}a^2 + 2 - Y = (2a - X)^2$$

$$Y = -X^2 + 4aX - \frac{8}{3}a^2 + 2$$

となる。よって、 C_2 の方程式は $y = -x^2 + 4ax - \frac{8}{3}a^2 + 2$ である。

(2)

C_1 と C_2 の交点の x 座標は、 $x^2 = -x^2 + 4ax - \frac{8}{3}a^2 + 2$ を満たす。これを変形すると $x^2 - 2ax + \frac{4}{3}a^2 - 1 = 0$ であり、これが2つの実数解を持つ条件を考えればよい。判別式を D として、

$$D/4 = a^2 - 4\left(\frac{4}{3}a^2 - 1\right) > 0$$

$$a^2 < 3 \quad \therefore a > 0 \text{ なので } 0 < a < \sqrt{3}$$

である。

(3)

P, Q の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、 $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$ であるから、直線 PQ の方程式は $y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$ となる。ここで、(2) より、 $\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = \frac{4}{3}a^2 - 1$ なので、直線 PQ は $y = 2ax - \frac{4}{3}a^2 + 1$ と書ける。 $\triangle PQR$ において、 PQ を底辺と見たときの高さ h は、この直線と R の距離だから、

$$h = \frac{\left|-2 - \frac{4}{3}a^2 + 1\right|}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \frac{4a^2 + 3}{3\sqrt{4a^2 + 1}} \cdots \textcircled{1}$$

である。一方、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} \\ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2(1 + (\alpha + \beta)^2)} \\ &= \sqrt{((\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta)(1 + (\alpha + \beta)^2)} \\ &= \sqrt{\left(4 - \frac{4}{3}a^2\right)(1 + 4a^2)} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

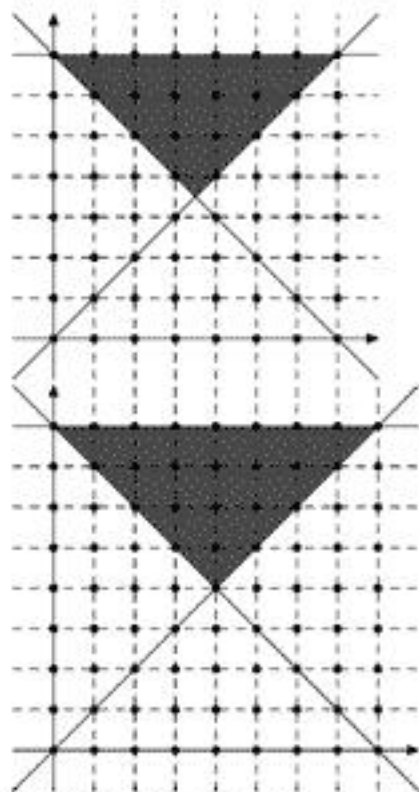
となる。 $\triangle PQR$ の面積を最大にするためには、 $PQ \cdot h$ を最大にすればいい。

$$PQ \cdot h = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{(3 - a^2)(4a^2 + 3)^2}$$

であるので、 $a^2 = A$ において、 $f(A) = -(A - 3)(4A + 3)^2$ を $0 < A < 3$ の範囲で最大化すればよい。 $f(A) = -3(4A + 3)(4A - 7)$ なので、 $f'(A) = 0$ を満たす A は $A = \frac{7}{4}$ である。このとき、増減表は下のようになる。

A	0	...	$\frac{7}{4}$	...	3
$f'(A)$		+	0	-	
$f(A)$		/	極大	\	

よって、 $A = \frac{7}{4}$ のとき、 $f(A)$ は最大になる。このとき、 $a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ である。



(1) 右図より, $a_7 = 6$, $a_8 = 9$ である.

(2) ある $x (0 < x < k)$ を固定して考える. このとき, $x < y < k < x + y$ は, $x < y$ かつ $y < k$ かつ $k - x < y$ と同値である. つまり, a と b の大きい方を $\max\{a, b\}$ と書くことにすれば, $\max\{x, k - x\} < y < k \cdots \textcircled{1}$ と同値になる. 以下, k が奇数か偶数かで場合分けする.

1. $k = 2n - 1$ (n は自然数) のとき. このとき,

$$\max\{x, 2n - 1 - x\} = \begin{cases} 2n - 1 - x & x = 1, 2, \dots, n - 1 \\ x & x = n, n + 1, \dots, 2n - 2 \end{cases}$$

であることに注意すれば,

$$a_{2n-1} = \sum_{x=1}^{n-1} \{(2n-2) - (2n-1-x)\} + \sum_{x=n}^{2n-2} \{(2n-2) - x\} = (n-1)(n-2)$$

2. $k = 2n$ のとき. このとき,

$$\max\{x, 2n - x\} = \begin{cases} 2n - x & x = 1, 2, \dots, n \\ x & x = n + 1, \dots, 2n - 1 \end{cases}$$

であることに注意すれば,

$$a_{2n} = \sum_{x=1}^n \{(2n-1) - (2n-x)\} + \sum_{x=n+1}^{2n-1} \{(2n-1) - x\} = (n-1)^2$$

となる.

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} a_k &= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1)(k-2) + \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(4n-5)}{6} \end{aligned}$$