

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \left[\tan x - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= 2 - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x-1} = t$ とおくと, $x = 1+t^2$ となるので, $\frac{dx}{dt} = 2t$ である. また

積分区間は, $\frac{x}{t} \left| \begin{array}{cc} \frac{4}{3} & \rightarrow 2 \\ \sqrt{3} & \rightarrow 1 \end{array} \right.$ となるので,

$$\int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{2}{(1+t^2)^2} dt$$

となる. さらにここで, $t = \tan \theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり, 積分区

間は, $\frac{t}{\theta} \left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{3}}{3} & \rightarrow \frac{1}{4} \\ \frac{\pi}{6} & \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$ となるので,

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{2}{(1+t^2)^2} dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{12} + \frac{2 - \sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

(1) 直線 l の式から $y = b - \frac{b}{a}x$ を得る. これを曲線 C の式に代入すると,

$$\begin{aligned} v^2 x^2 + u^2 \left(b - \frac{b}{a}x\right)^2 &= u^2 v^2 \\ v^2 x^2 + \frac{b^2 u^2}{a^2} x^2 - \frac{2b^2 u^2}{a} x + b^2 u^2 &= u^2 v^2 \\ (a^2 v^2 + b^2 u^2) x^2 - 2ab^2 u^2 x + a^2 u^2 (b^2 - v^2) &= 0 \end{aligned}$$

l と C が接するためには, この x についての 2 次方程式の判別式 D が 0 になればいいので,

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 b^4 u^4 - a^2 u^2 (b^2 - v^2)(a^2 v^2 + b^2 u^2) = 0 \\ b^4 u^2 - (b^2 - v^2)(a^2 v^2 + b^2 u^2) &= 0 \\ a^2 v^4 + (b^2 u^2 - a^2 b^2) v^2 &= 0 \\ a^2 v^2 - b^2 (a^2 - u^2) &= 0 \end{aligned}$$

より, $v^2 = b^2 \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)$ を得る.

(2) まず, $v^2 > 0$ なので, (1) より, $0 < u < a$ であることに注意する.

V を求めると,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-u}^u \pi y^2 dx \\ &= \int_{-u}^u \pi \left(v^2 - \frac{v^2}{u^2} x^2\right) dx \\ &= \pi v^2 \left[x - \frac{1}{3u^2} x^3\right]_{-u}^u \\ &= \frac{4\pi}{3} u v^2 \end{aligned}$$

となる. ここで, (1) を用いて v^2 を消去すると, $V = \frac{4\pi b^2}{3a^2} (a^2 u - u^3)$ を得る. $f(u) = a^2 u - u^3$ において, $f(u)$ の $0 < u < a$ での最大値を調べれば十分である.

$f'(u) = a^2 - 3u^2$ に注意すれば, $f'(u) = 0$ となる u は $u = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ である. よって, 増減表は下のようになる.

u	(0)	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	...	(a)
$f'(u)$		+		-	
$f(u)$		/		\	

従って, V は $u = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ のとき最大となり, その最大値は $V = \frac{8\sqrt{3}\pi}{27}ab^2$

となる. (1) より, $v^2 = \frac{2}{3}b^2$ なので, C の方程式は, $\frac{3x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{2b^2} = 1$ である.

(1) $P(t, t^2)$, $Q(X, Y)$ とおく。問題の条件から、 $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP}$ であるので、成分ごとに計算すれば、

$$\begin{cases} X - a = k(t - a) \\ Y - b = k(t^2 - a) \end{cases}$$

となる。ここから t を消去すれば、 C' の方程式は、

$$y = \frac{1}{k}x^2 - \frac{2a(1-k)}{k}x + (1-k)\left(\frac{a^2}{k} - a^2 + b\right)$$

となる。

(2) $x^2 = \frac{1}{k}x^2 - \frac{2a(1-k)}{k}x + (1-k)\left(\frac{a^2}{k} - a^2 + b\right)$ を整理すると、

$$x^2 - 2ax + \{(1-k)a^2 + kb\} = 0 \dots \textcircled{1}$$

を得る。この2次方程式の判別式を D とすると、 $D/4 = a^2 - (1-k)a^2 - kb = k(a^2 - b) > 0$ となるので、 C と C' は2つの点で交わる。

そのときの面積は、 $\textcircled{1}$ の解を α , $\beta (\alpha < \beta)$ とすると、

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \frac{1}{k}\right)(x - \alpha)(x - \beta)dx = \frac{k-1}{k} \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

で与えられる。解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^3 &= \{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{3/2} \\ &= \{4a^2 - 4(1-k)a^2 - 4kb\}^{3/2} \\ &= 8(ka^2 - kb)^{3/2} \end{aligned}$$

となるので、求める面積は $\frac{4}{3}\sqrt{k}(k-1)(a^2 - b)^{3/2}$ である。

(1) $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$ である. $f(x)$ は極大値と極小値を持つので, $f'(x) = 0$ が 2 つの実数解を持たねばならない. 判別式を D とすれば,

$$D/4 = a^2 - b > 0 \cdots \textcircled{1}$$

がわかる. このときの解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると, 極大値は $f(\alpha)$, 極小値は $f(\beta)$ なので, 問題の条件は $\textcircled{1}$ かつ $f(\alpha)f(\beta) < 0 \cdots \textcircled{2}$ かつ $f(\alpha) + f(\beta) < 0 \cdots \textcircled{3}$ と同値である. $\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = b$ に注意すれば,

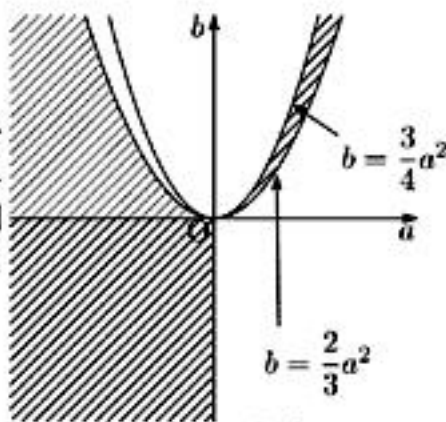
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha \\ &= (\alpha^2 + 2a\alpha + b)(\alpha + a) + 2(b - a^2)\alpha - ab \\ &= 2(b - a^2)\alpha - ab \end{aligned}$$

となる. $f(\beta)$ も同様なので,

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= -4a(b - a^2) - 2ab = -2a(3b - 2a^2) \\ f(\alpha)f(\beta) &= 4b(b - a^2)^2 + 4a^2b(b - a^2) + a^2b^2 \\ &= b^2(4b - 3a^2) \end{aligned}$$

である.

従って, $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ より, $a(3b - 2a^2) > 0$ かつ $b^2(4b - 3a^2) < 0$ を得る. これらと $\textcircled{1}$ を図示すれば, (a, b) の範囲は右図のようになる. ただし境界は含まない.



(2) $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ かつ $f(\alpha)f(\beta) = -1$ であればいいので,

$$\begin{cases} -2a(3b - 2a^2) = 0 & \cdots \textcircled{4} \\ b^2(4b - 3a^2) = -1 & \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

を解けばよい. $\textcircled{4}$ より, $a = 0$ または $b = \frac{2}{3}a^2$ である. $a = 0$ ならば, $\textcircled{5}$ より $4b^3 = -1$ なので $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ を得る. 一方, $b = \frac{2}{3}a^2$ ならば, 同様に $\textcircled{5}$ に代入して $b^3 = 2$ つまり, $b = \sqrt[3]{2}$ を得る. これを $b = \frac{2}{3}a^2$ に代入して $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ となる. 以上より, 求める組は, $(a, b) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right), \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$ である.

(1) 問題の式を $\vec{p}$ について整理すると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k|\vec{p} - \vec{u}_k|^2 &= \sum_{k=1}^n k|\vec{p}|^2 - 2k\vec{p} \cdot \vec{u}_k + k|\vec{u}_k|^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n k\vec{u}_k\right) + \sum_{k=1}^n k|\vec{u}_k|^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left| \vec{p} - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k\vec{u}_k \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n k|\vec{u}_k|^2 - \frac{2}{n(n+1)} \left| \sum_{k=1}^n k\vec{u}_k \right|^2\end{aligned}$$

であるので, $\vec{v} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k\vec{u}_k$ を得る.

(2)(1) の結果より,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{v}|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2(n+1)^2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n k \cos \frac{k\alpha}{n} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n k \sin \frac{k\alpha}{n} \right)^2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(1+1/n)^2} \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{k\alpha}{n} \right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \frac{k\alpha}{n} \right)^2 \right\} \\ &= 4 \left\{ \left(\int_0^1 x \sin \alpha x dx \right)^2 + \left(\int_0^1 x \cos \alpha x dx \right)^2 \right\} \\ &= 4 \left\{ \left(\left[-\frac{1}{\alpha} x \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} \sin \alpha x \right]_0^1 \right)^2 + \left(\left[\frac{1}{\alpha} x \sin \alpha x - \frac{1}{\alpha^2} \cos \alpha x \right]_0^1 \right)^2 \right\} \\ &= \frac{4}{\alpha^4} (\alpha^2 + 2 - 2 \cos \alpha - 2\alpha \sin \alpha)\end{aligned}$$

(3)(1) より,

$$m = \sum_{k=1}^n k|\vec{u}_k|^2 - \frac{n(n+1)}{2} |\vec{v}|^2$$

である. 今 $|\vec{u}_k| = 1$ であることに注意すると,

$$\frac{m}{n^2} = \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n} |\vec{v}|^2$$

となるので, (2) を使えば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2} = \frac{1}{2\alpha^4} (\alpha^4 - 4\alpha^2 + 8\alpha \sin \alpha + 8 \cos \alpha - 8)$$

を得る.