

## A 2

# 数 学

(平成 19 年 度)

### 〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 受験番号を 3 枚の解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(1 枚目, 2 枚目は表裏の 2 箇所, 3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には, 問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後, 問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$(2) \int_{\frac{4}{3}}^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}$$

2  $xy$  平面上に、直線  $\ell: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  がある。ただし、 $a, b$  は正の定数である。曲線  $C: \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$  がつねに  $\ell$  に接しているように正の実数  $u, v$  を変化させる。 $C$  で囲まれる部分を  $x$  軸の周りに回転してできる立体の体積を  $V$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $v^2$  を  $a, b, u$  を用いて表せ。

(2)  $V$  の最大値を、 $a, b$  を用いて表せ。また、そのときの  $C$  の方程式を  $a, b$  を用いて表せ。

3  $xy$  平面上に、 $b < a^2$  をみたす点  $A(a, b)$  がある。曲線  $C: y = x^2$  上に点  $P$  をとり、線分  $AP$  を  $k:k-1$  ( $k > 1$ ) に外分する点を  $Q$  とする。 $P$  が  $C$  上を動くときにできる  $Q$  の軌跡を  $C'$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $C'$  の方程式を求めよ。

(2)  $C$  と  $C'$  は 2 つの点で交わることを示し、 $C$  と  $C'$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

4  $a, b$  は実数とする。関数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$  が極大値と極小値をもつ。次の問いに答えよ。

(1) 極大値が正で、極小値が負で、かつ極大値と極小値の和が負となる点  $(a, b)$  の範囲を図示せよ。

(2) 極大値が 1 で、極小値が  $-1$  であるような点  $(a, b)$  をすべて求めよ。

5 座標平面上に、ベクトル  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  がある。座標平面上のベクトル  $\vec{p}$ のうち、 $\sum_{k=1}^n k |\vec{p} - \vec{u}_k|^2$  を最小にするものを  $\vec{v}$  とし、そのときの最小値を  $m$  とする。次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{v}$  を  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  を用いて表せ。

以下、 $\vec{u}_k = (\cos \frac{k\alpha}{n}, \sin \frac{k\alpha}{n})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の場合を考える。ただし、 $\alpha$  は正の定数とする。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{v}|^2$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^2}$  を求めよ。