

1

(1)

C_1 と C_2 の方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned}x^2 &= 2(x-1)^2 + 3 \\x^2 - 4x + 5 &= 0 \\(x-2)^2 &= -1\end{aligned}$$

となるので、これを満たす実数 x は存在しない。したがって、結論を得る。

(証明終)

(2)

C_2 と C_3 の方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned}2(x-1)^2 + 3 &= -(x-a)^2 + b \\3x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 5 - b &= 0\end{aligned}$$

この方程式の判別式を D とするとき、 $D=0$ となればよい。

$$\begin{aligned}D/4 &= (a+2)^2 - 3(a^2 + 5 - b) \\&= -2a^2 + 4a - 11 + 3b\end{aligned}$$

であるから、

$$b = \frac{1}{3}(2a^2 - 4a + 11)$$

である。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{1}{3}(2a^2 - 4a + 11)$$

(3)

C_1 と C_3 の方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned}x^2 &= -(x-a)^2 + b \\2x^2 - 2ax + a^2 - b &= 0\end{aligned}$$

となる。この判別式を計算すると、

$$\begin{aligned}D/4 &= -a^2 + 2b \\&= \frac{1}{3}(a-4)^2 + 2 > 0\end{aligned}$$

となり、異なる2つの実数解を持つ。その2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = \frac{1}{6}(a^2 + 4a - 11) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_a^\beta \left\{ -(x-a)^2 + \frac{1}{3}(2a^2 - 4a + 11) - x^2 \right\} dx \\&= -2 \int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx \\&= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

となる。ここで、①と②より

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= a \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &= a^2 - 4\alpha\beta \\ \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2 &= a^2 - \frac{2}{3}(a^2 + 4a - 11) \\ \Leftrightarrow \beta-\alpha &= \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{22}{3}} \\ \Leftrightarrow \beta-\alpha &= \sqrt{\frac{1}{3}(a-4)^2 + 2}\end{aligned}$$

であるので

$$S(a) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3}(a-4)^2 + 2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

となり、 $S(a)$ を最小にする a の値は

4

となる。

(答) $a = 4$

2

(1)

P を通り、 ℓ_1 に垂直な直線は、

$$y = -\frac{1}{m}x + \left(m + \frac{1}{m}\right)s$$

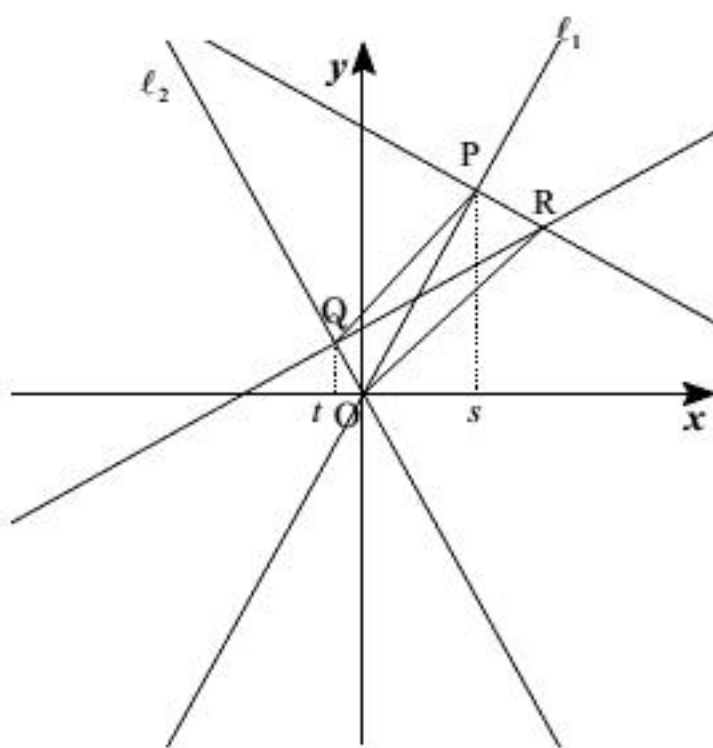
であり、Q を通り、 ℓ_2 に垂直な直線は、

$$y = \frac{1}{m}x - \left(m + \frac{1}{m}\right)t$$

である。よって、これらを連立して x と y について解くことにより、R の座標は、

$$R\left(\frac{m^2+1}{2}(s+t), \frac{m^2+1}{2m}(s-t)\right)$$

となる。



$$(答) R\left(\frac{m^2+1}{2}(s+t), \frac{m^2+1}{2m}(s-t)\right)$$

(2)

$\overline{QP}$ と $\overline{OR}$ が平行にならなくてはならない。

$$\overline{QP} = \begin{pmatrix} s-t \\ m(s+t) \end{pmatrix}$$

であるから、先の条件は、

$$\frac{m^2+1}{2}(s+t) \times m(s+t) - \frac{m^2+1}{2m}(s-t) \times (s-t) = 0$$

と書ける。これをまとめると、

$$\frac{m^2+1}{2m} \{m^2(s+t)^2 - (s-t)^2\} = 0$$

となる。今 $m > 1$ なので、両辺を $(m^2+1)/2m$ で割ってもよく、そうしてまとめると、

$$s-t = \pm m(s+t) \quad \cdots (*)$$

ここで $s-t=0$ とすると、(*) と $m > 1$ より $s+t=0$ となり、 $s=t=0$ となる。これは条件 $s \neq 0, t \neq 0$ に不適となる。よって、

$$\begin{cases} s-t \neq 0 \\ s+t \neq 0 \end{cases}$$

であり、 $R(x, y)$ とすると(1)の答えより

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{cases} x = \frac{m^2+1}{2}(s+t) \\ y = \frac{m^2+1}{2m}(s-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t = \frac{2x}{m^2+1} \\ s-t = \frac{2my}{m^2+1} \end{cases}$$

となるので、(*) に代入すると、

$$\frac{2my}{m^2+1} = \pm \frac{2mx}{m^2+1} \Leftrightarrow y = \pm x$$

である。よって①も考えると R の軌跡は

$$y = \pm x \quad (\text{原点を除く})$$

となる。

(答) $y = \pm x$ (原点を除く)

3

(1)

n に関する帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{4} \text{ なので, 題意は満たされる。}$$

[2] $n=k$ ($k>0$) のとき, $0 < a_{2k+1} \leq \frac{1}{2}$ であると仮定する。

このとき, 与えられた漸化式から,

$$a_{2k} = 1 - a_{2k-1}^2$$

である。ここで, 帰納法の仮定より

$$\frac{3}{4} \leq a_{2k} < 1$$

を得る。さらに,

$$a_{2k+1} = 1 - a_{2k}^2$$

であるから, $\frac{3}{4} \leq a_{2k} < 1$ を用いて

$$0 < a_{2k+1} \leq \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$$

となる。したがって, $n=k+1$ でも題意が満たされることが分かる。

以上より結論を得る。

(証明終)

(2)

$f'(x) = 2 - 3x^2$ である。 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき,

$$f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0$$

であるから $f(x)$ は単調増加である。よって,

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{7}{8}$$

$$\text{(答) } 0 \leq f(x) \leq \frac{7}{8}$$

(3)

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 1 - a_{2n}^2 \\ a_{2n} = 1 - a_{2n-1}^2 \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 1 - (1 - a_{2n-1}^2)^2 \\ &= 2a_{2n-1}^2 - a_{2n-1}^4 \end{aligned}$$

であり, (1)より $a_{2n-1} > 0$ なので両辺を a_{2n-1} で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} &= 2a_{2n-1} - a_{2n-1}^3 \\ &= f(a_{2n-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで(1)より $n=1, 2, 3, \dots$ に対して $0 < a_{2n-1} \leq \frac{1}{2}$ なので(2)の答より

$$0 < f(a_{2n-1}) \leq \frac{7}{8}$$

となり, 題意は示せた。

(証明終)