

1

(1)

$$\sqrt{1-e^{-2x}} = t \text{ より,}$$

$$x = -\frac{1}{2} \log(1-t^2)$$

を得る。これを t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1-t^2}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-e^{-2x}} dx &= \int t \cdot \frac{t}{1-t^2} dt \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{1-t^2} \right) dt \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)} \right) dt \\ &= -t + \frac{1}{2} \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C \\ &= -\sqrt{1-e^{-2x}} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sqrt{1-e^{-2x}}}{1-\sqrt{1-e^{-2x}}} \right| + C \\ &= x - \sqrt{1-e^{-2x}} + \log(1+\sqrt{1-e^{-2x}}) + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad x - \sqrt{1-e^{-2x}} + \log(1+\sqrt{1-e^{-2x}}) + C$$

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned} \int_0^a (1 - \sqrt{1-e^{-2x}}) dx &= \left[\sqrt{1-e^{-2x}} - \log(1+\sqrt{1-e^{-2x}}) \right]_0^a \\ &= \sqrt{1-e^{-2a}} - \log(1+\sqrt{1-e^{-2a}}) \end{aligned}$$

であるから、求める極限は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{1-e^{-2a}} - \log(1+\sqrt{1-e^{-2a}}) \right\} = 1 - \log 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad 1 - \log 2$$

(1)

C_1 と C_2 の方程式を連立して y を消去すると,

$$x^2 = 2(x-1)^2 + 3$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 = -1$$

となるので, これを満たす実数 x は存在しない。したがって, 結論を得る。

(証明終)

(2)

C_2 と C_3 の方程式を連立して y を消去すると,

$$2(x-1)^2 + 3 = -(x-a)^2 + b$$

$$3x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 5 - b = 0$$

この方程式の判別式を D とするとき, $D=0$ となればよい。

$$\begin{aligned} D/4 &= (a+2)^2 - 3(a^2 + 5 - b) \\ &= -2a^2 + 4a - 11 + 3b \end{aligned}$$

であるから,

$$b = \frac{1}{3}(2a^2 - 4a + 11)$$

である。

$$(答) \quad b = \frac{1}{3}(2a^2 - 4a + 11)$$

(3)

C_1 と C_3 の方程式を連立して y を消去すると,

$$x^2 = -(x-a)^2 + b$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$$

となる。この判別式を計算すると,

$$\begin{aligned} D/4 &= -a^2 + 2b \\ &= \frac{1}{3}(a-4)^2 + 2 > 0 \end{aligned}$$

となり, 異なる2つの実数解を持つ。その2解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = \frac{1}{6}(a^2 + 4a - 11) & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^\beta \left\{ -(x-a)^2 + \frac{1}{3}(2a^2 - 4a + 11) - x^2 \right\} dx \\ &= -2 \int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。ここで, ①と②より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &= a^2 - 4\alpha\beta \\ \Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2 &= a^2 - \frac{2}{3}(a^2 + 4a - 11) \\ \Leftrightarrow \beta-\alpha &= \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - \frac{8}{3}a + \frac{22}{3}} \\ \Leftrightarrow \beta-\alpha &= \sqrt{\frac{1}{3}(a-4)^2 + 2} \end{aligned}$$

であるので

$$S(a) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3}(a-4)^2 + 2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

となり, $S(a)$ を最小にする a の値は

$$4$$

となる。

(答) $a = 4$

(1)

P を通り、 ℓ_1 に垂直な直線は、

$$y = -\frac{1}{m}x + \left(m + \frac{1}{m}\right)s$$

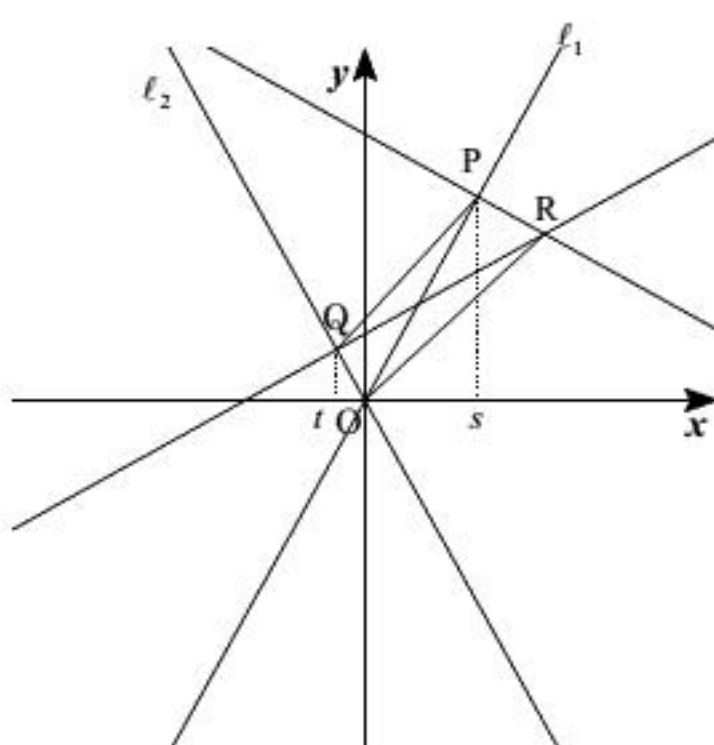
であり、Q を通り、 ℓ_2 に垂直な直線は、

$$y = \frac{1}{m}x - \left(m + \frac{1}{m}\right)t$$

である。よって、これらを連立して x と y について解くことにより、R の座標は、

$$R\left(\frac{m^2+1}{2}(s+t), \frac{m^2+1}{2m}(s-t)\right)$$

となる。



$$(答) R\left(\frac{m^2+1}{2}(s+t), \frac{m^2+1}{2m}(s-t)\right)$$

(2)

$\overline{QP}$ と $\overline{OR}$ が平行にならなくてはならない。

$$\overline{QP} = \begin{pmatrix} s-t \\ m(s+t) \end{pmatrix}$$

であるから、先の条件は、

$$\frac{m^2+1}{2}(s+t) \times m(s+t) - \frac{m^2+1}{2m}(s-t) \times (s-t) = 0$$

と書ける。これをまとめると、

$$\frac{m^2+1}{2m} \{m^2(s+t)^2 - (s-t)^2\} = 0$$

となる。今 $m > 1$ なので、両辺を $(m^2+1)/2m$ で割ってもよく、そうしてまとめると、

$$s-t = \pm m(s+t) \quad \cdots (\ast)$$

ここで $s-t=0$ とすると、 $(\ast)$ と $m > 1$ より $s+t=0$ となり、 $s=t=0$ となる。これは条件 $s \neq 0, t \neq 0$ に不適となる。よって、

$$\begin{cases} s-t \neq 0 \\ s+t \neq 0 \end{cases}$$

であり、 $R(x, y)$ とすると(1)の答えより

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{cases} x = \frac{m^2+1}{2}(s+t) \\ y = \frac{m^2+1}{2m}(s-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s+t = \frac{2x}{m^2+1} \\ s-t = \frac{2my}{m^2+1} \end{cases}$$

となるので、 $(\ast)$ に代入すると、

$$\frac{2my}{m^2+1} = \pm \frac{2mx}{m^2+1} \Leftrightarrow y = \pm x$$

である。よって①も考えると R の軌跡は

$$y = \pm x \quad (\text{原点を除く})$$

となる。

(答) $y = \pm x$ (原点を除く)

与えられた領域は図のようにあらわされる。対称性から、 $x \geq 0$ での回転体の体積を2倍すれ

ばいいことに注意する。 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ を y について解けば、

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1-x^2}$$

であることから、求める体積 V は、

$$V = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} \right)^2 dx + 2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left\{ \pi \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} \right)^2 - \pi \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2} \right)^2 \right\} dx$$

と与えられる。これをまとめると、

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{5}{4} - x^2 + \sqrt{1-x^2} \right) dx + 4\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

となる。ここで、図より、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

となるので、

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left(\left[\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + 4\pi \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + \pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + \frac{3\sqrt{3}\pi}{4} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{2\pi^2}{3} + \frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$$

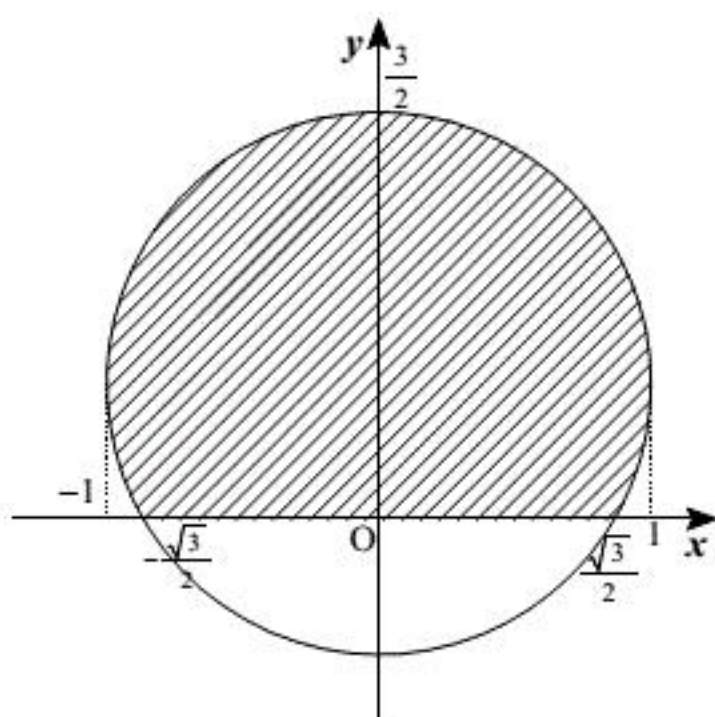


図4:4の図

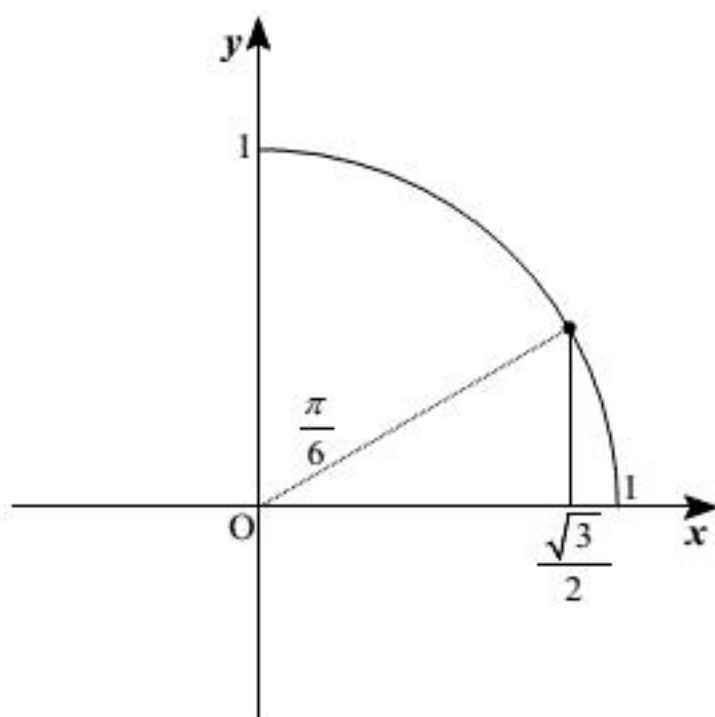


図5:4の図($\sqrt{1-x^2}$ の定積分計算)

(1)

n に関する帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{4}$ なので、題意は満たされる。

[2] $n=k$ ($k>0$) のとき、 $0 < a_{2k-1} \leq \frac{1}{2}$ であると仮定する。

このとき、与えられた漸化式から、

$$a_{2k} = 1 - a_{2k-1}^2$$

である。ここで、帰納法の仮定より

$$\frac{3}{4} \leq a_{2k} < 1$$

を得る。さらに、

$$a_{2k+1} = 1 - a_{2k}^2$$

であるから、 $\frac{3}{4} \leq a_{2k} < 1$ を用いて

$$0 < a_{2k+1} \leq \frac{7}{16} < \frac{1}{2}$$

となる。したがって、 $n=k+1$ でも題意が満たされることが分かる。

以上より結論を得る。

(証明終)

(2)

$f'(x) = 2 - 3x^2$ である。 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき、

$$f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0$$

であるから $f(x)$ は単調増加である。よって、

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{7}{8}$$

$$(答) \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{7}{8}$$

(3)

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 1 - a_{2n}^2 \\ a_{2n} = 1 - a_{2n-1}^2 \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 1 - (1 - a_{2n-1}^2)^2 \\ &= 2a_{2n-1}^2 - a_{2n-1}^4 \end{aligned}$$

であり、(1)より $a_{2n-1} > 0$ なので両辺を a_{2n-1} で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} &= 2a_{2n-1} - a_{2n-1}^3 \\ &= f(a_{2n-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで(1)より $n=1, 2, 3, \dots$ に対して $0 < a_{2n-1} \leq \frac{1}{2}$ なので(2)の答より

$$0 < f(a_{2n-1}) \leq \frac{7}{8}$$

となり、題意は示せた。

(証明終)