

A 1

数 学

(平成 20 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはならない。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 2 枚の解答用紙(A 6—1 から A 6—2)の 3 箇所にならず記入しなさい。(1 枚目表裏の 2 箇所、2 枚目は表のみ)
4. この冊子には 3 問題あります。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は手を挙げて監督者に知らせなさい。
5. 解答は必ず解答用紙(A 6—1 と A 6—2)の指定箇所(問題番号と一致する番号のところ)に記入しなさい。
6. 下書きにはこの冊子の余白を使用しなさい。
7. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 xy 平面上に 3 つの曲線

$$C_1: y = x^2$$

$$C_2: y = 2(x - 1)^2 + 3$$

$$C_3: y = -(x - a)^2 + b \quad (a, b \text{ は実数})$$

がある。 C_2 と C_3 はただ 1 つの点を共有している。次の問いに答えよ。

(1) C_1 , C_2 は共有点をもたないことを示せ。

(2) b を a の式で表せ。

(3) C_1 と C_3 で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a を求めよ。

2 原点を O とする xy 平面上に, 2 直線

$$\ell_1 : y = mx$$

$$\ell_2 : y = -mx$$

がある。ただし, $m > 1$ とする。 ℓ_1 上に点 $P(s, ms)$, ℓ_2 上に点 $Q(t, -mt)$ を $s \neq 0$, $t \neq 0$ となるようにとる。P を通り ℓ_1 に垂直な直線と, Q を通り ℓ_2 に垂直な直線の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) R の座標を求めよ。

(2) PQ と OR が平行となるように P, Q を動かすとき, R の軌跡を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 1 - a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) $0 < a_{2n-1} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4} \leq a_{2n} < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ であることを示せ。
- (2) x が $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、関数 $f(x) = 2x - x^3$ のとる値の範囲を求めよ。
- (3) $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \leq \frac{7}{8} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ であることを示せ。