

A 2

数 学

(平成 20 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の 5 箇所(1 枚目は表裏の 2 箇所、2 枚目は表のみ)に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙(A 7—1 から A 7—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分

$$\int \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$$

を置換 $\sqrt{1 - e^{-2x}} = t$ を用いて求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \left(1 - \sqrt{1 - e^{-2x}} \right) dx$$

を求めよ。

2 xy 平面上に 3 つの曲線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = 2(x-1)^2 + 3$$

$$C_3 : y = -(x-a)^2 + b \quad (a, b \text{ は実数})$$

がある。 C_2 と C_3 はただ 1 つの点を共有している。次の問いに答えよ。

- (1) C_1, C_2 は共有点をもたないことを示せ。
- (2) b を a の式で表せ。
- (3) C_1 と C_3 で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a を求めよ。

3 原点を O とする xy 平面上に, 2 直線

$$\ell_1: y = mx$$

$$\ell_2: y = -mx$$

がある。ただし, $m > 1$ とする。 ℓ_1 上に点 $P(s, ms)$, ℓ_2 上に点 $Q(t, -mt)$ を $s \neq 0$, $t \neq 0$ となるようにとる。P を通り ℓ_1 に垂直な直線と, Q を通り ℓ_2 に垂直な直線の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) R の座標を求めよ。

(2) PQ と OR が平行となるように P, Q を動かすとき, R の軌跡を求めよ。

4 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

の表す図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

5 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = 1 - a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) $0 < a_{2n-1} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4} \leq a_{2n} < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ であることを示せ。

(2) x が $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、関数 $f(x) = 2x - x^3$ のとる値の範囲を求めよ。

(3) $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \leq \frac{7}{8} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ であることを示せ。

2