1

(1)

まず $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}$ である。

次に $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+q\vec{b}=p(1-q)\vec{a}+q\vec{b}$

よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+r\vec{c}=p(1-q)(1-r)\vec{a}+q(1-r)\vec{b}+r\vec{c}$$

となる。

（答）　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=p(1-q)(1-r)\vec{a}+q(1-r)\vec{b}+r\vec{c}$

(2)

O,R,S は同一直線上にあるから、ある定数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と表せる。

また S は A,B,C が張る面上にあるから、ある定数 s,t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$　とも表せ、これは $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ それぞれの係数を足すと 1 になることを表す。したがって、

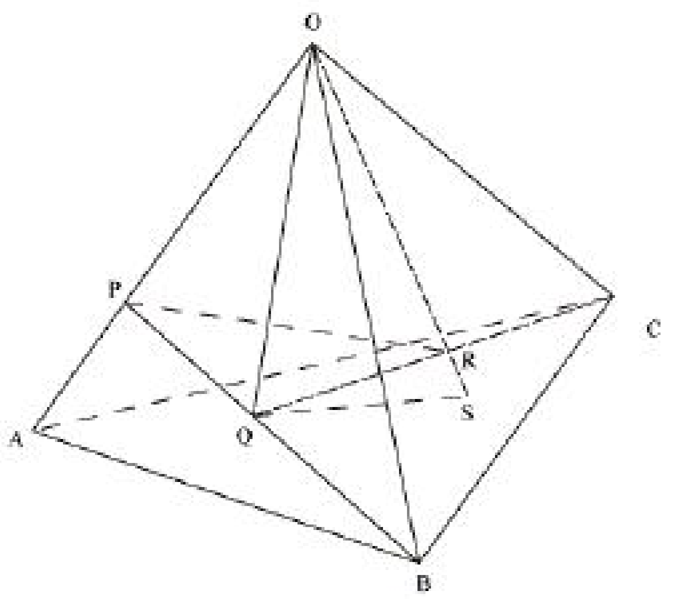
$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}=kp(1-q)(1-r)\vec{a}+kq(1-r)\vec{b}+kr\vec{c}$ の $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の係数を足し合わせて 1 になればよいので、

$$kp(1-q)(1-r)+kq(1-r)+kr=1 \quad \therefore k=\frac{1}{p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r}$$

以上から、$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r}\left\{p(1-q)(1-r)\vec{a}+q(1-r)\vec{b}+r\vec{c}\right\}$ である。

（答）$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r}\left\{p(1-q)(1-r)\vec{a}+q(1-r)\vec{b}+r\vec{c}\right\}$

(3)



まず

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OPB}\times q=\triangle\mathrm{OAB}\times p\times q$$
$$=pq\triangle\mathrm{OAB} \quad \cdots ①$$

ここで四面体 OPQR の体積を V_3 と置けば、V_1 と V_3 の関係は以下のようにかける。

$$V_3=\frac{\triangle\mathrm{OPQ}}{\triangle\mathrm{OAB}}\times\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{QC}}V_1$$
$$=pqrV_1 \quad (\because ①より) \quad \cdots ②$$

また、V_2 と V_3 は P を頂点と見れば、

$$V_3=\frac{\triangle\mathrm{OQR}}{\triangle\mathrm{OQS}}\times V_2$$
$$=\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OS}}\times V_2$$
$$=\left(p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r\right)\times V_2 \quad (\because (2)より) \quad \cdots ③$$

②、③より、

$$pqrV_1=\left(p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r\right)\times V_2$$
$$\Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{pqr}{p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r}$$

（答）　$\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{pqr}{p(1-q)(1-r)+q(1-r)+r}$

2

(1)

円 C の外部の点 $\mathrm{P}(s,t)\ (t\neq\pm1)$ から C へ引いた接線は，x 軸に平行ではないから，ある実定数 a を用いて

$$x=a(y-t)+s$$
$$\Leftrightarrow x-ay+(-s+at)=0$$

と表せる。この直線が C に接するための条件は，点と直線の距離公式より

$$\frac{|-s+at|}{\sqrt{1+a^2}}=1$$
$$\Leftrightarrow |-s+at|=\sqrt{1+a^2}$$
$$\Leftrightarrow (-s+at)^2=1+a^2$$
$$\Leftrightarrow (t^2-1)a^2-2sta+(s^2-1)=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

である。この a についての 2 次方程式$(\because t^2-1\neq0)$の判別式を D とすると，$s^2+t^2>1$ であることから

$$\frac{D}{4}=(st)^2-(t^2-1)(s^2-1)$$
$$=s^2+t^2-1$$
$$>0$$

となる。よって，確かに点 $\mathrm{P}(s,t)\ (t\neq\pm1)$ から円 C へ 2 本の接線が引けることがわかる。ここで，①の異なる 2 つの解を $a_1,\ a_2$ とおくことにする。点 Q, R の x 座標は

$$a_1(1-t)+s,\ a_2(1-t)+s$$

であるから，線分 QR の長さは

$$\left|\{a_1(1-t)+s\}-\{a_2(1-t)+s\}\right|=|a_1-a_2||t-1|$$

である。①より，$|a_1-a_2|=\left|\dfrac{\sqrt{D}}{t^2-1}\right|=\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2-1}}{|t-1||t+1|}$ であるから，求める長さは

$$|a_1-a_2||t-1|=\frac{2\sqrt{s^2+t^2-1}}{|t+1|}$$

であることがわかる。

（答）　$\mathrm{QR}=\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2-1}}{|t+1|}$

(2)

$$\mathrm{QR}=\frac{2\sqrt{s^2+t^2-1}}{|t+1|}=2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{s^2+t^2-1}=|t+1|$$

両辺正より、両辺を２乗して、

$$s^2+t^2-1=(t+1)^2=t^2+2t+1$$
$$t=\frac{1}{2}s^2-1$$

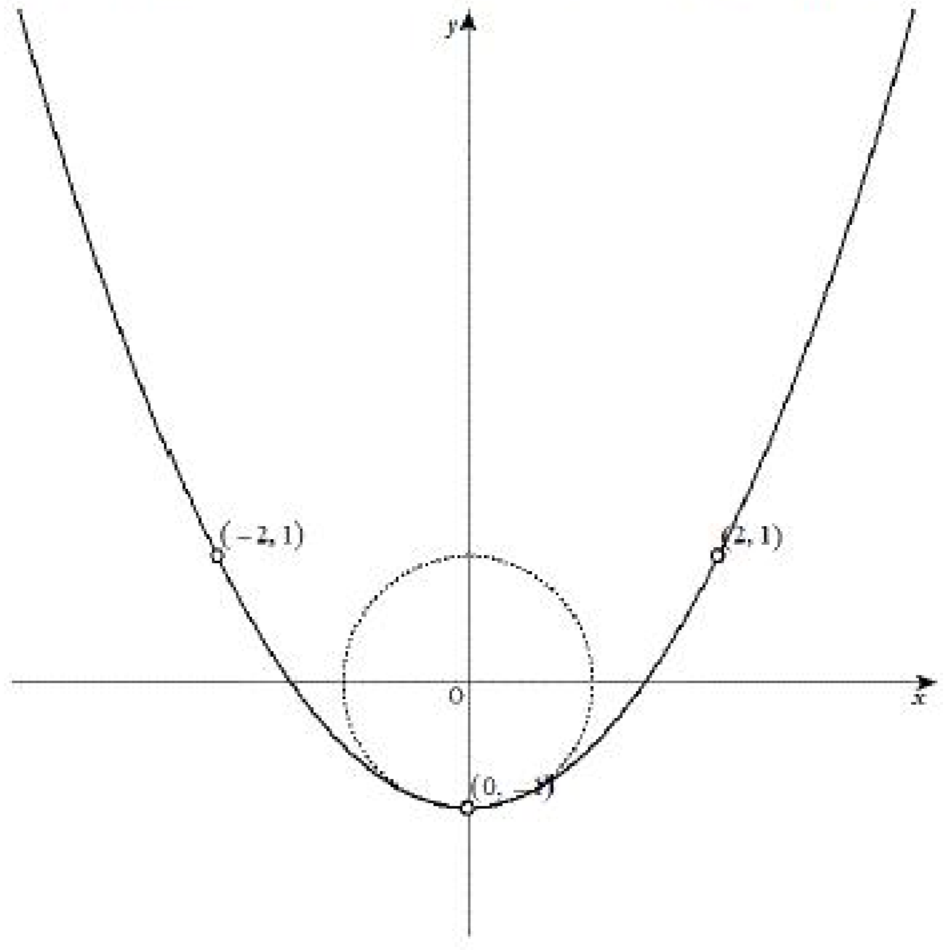
よって求める軌跡は s,t をそれぞれ x,y と改めれば

$$\begin{cases} x^2+y^2>1 \\ y\neq\pm1 \\ y=\dfrac{1}{2}x^2-1 \end{cases}$$

を満たす。

したがってこれを図示すれば、次のような軌跡になる。（白丸は含まれない部分）

（答）



3

(1)

赤をr　青をb　黄をyと表すことにする。

n個のマスを何色で塗り分けるかを、左から$\underbrace{(r,b,\cdots,y)}_{n\text{個}}$のように表す。

たとえば3個のマスを左から赤青黄と塗り分けるなら、(r,b,y)と表す。

3個のマスを両端が同じように塗り分ける方法は、両端が赤のとき$(r,b,r),(r,y,r)$の2通りがある。これは両端が青でも黄でも同じなので、

$a_3=2\times3=6$

3個のマスを両端が異なる色になるよう塗り分けるのは、両端の色が赤と青のとき$(r,y,b),(b,y,r)$の2通りがある。これは両端の色の組み合わせが変わっても同じなので、

$b_3=2\times{}_3\mathrm{C}_2=6$

4個のマスを両端が同じように塗り分ける方法は、両端が赤のとき$(r,b,y,r),(r,y,b,r)$の2通りがある。これは両端の色が青でも黄でも同じなので、

$a_4=2\times3=6$

4個のマスを両端が異なる色になるよう塗り分けるのは、両端の色が赤と青のとき$(r,b,y,b),(r,y,r,b),(r,b,r,b),(b,r,b,r),(b,r,y,r),(b,y,b,r)$の6通りがある。
これは両端の色の組み合わせが変わっても同じなので、

$b_4=6\times{}_3\mathrm{C}_2=18$

（答）　$a_3=6$　$b_3=6$　$a_4=6$　$b_4=18$

(2)

まずa_{n+1},b_{n+1},a_n,b_nの関係を求める。

n個のマスを塗り分けた時に両端の色が同じならば、n個のマスの右に1マス追加して$n+1$マスにしたとき、追加したマスには必ず左n個のマスの両端に塗られている色以外の2色のどちらかを塗る。

n個のマスを塗り分けた時に両端の色が異なるならば、$n+1$マスにしたとき追加したマスには必ず左n個のマスの右端に塗られている色以外の2色のうちどちらかを塗る。このとき、1色は$n+1$個のマスの両端を同じ色にし、1色は両端を異なる色にする。

よって、

$$\begin{cases}a_{n+1}=b_n & \cdots① \\ b_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots②\end{cases}$$

①+②より、

$a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)$　$(n\geqq3)$

よって数列$\{a_n+b_n\}$は初項$a_3+b_3=12$,公比2の等比数列なので

$a_n+b_n=3\cdot2^{n-1}$

これと①から、

$a_{n+1}+a_n=3\cdot2^{n-1}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}-\dfrac{1}{2}\cdot2^{n+1}=-\left(a_n-\dfrac{1}{2}\cdot2^n\right)$　$(n\geqq3)$

数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\cdot2^n\right\}$は初項$a_3-\dfrac{1}{2}\cdot2^3=2$　公比-1の等比数列で、

$a_n-\dfrac{1}{2}\cdot2^n=2\cdot(-1)^{n-3}=2\cdot(-1)^{n-1}$　$(\because(-1)^2=1)$

したがって　$a_n=2^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$　$(n\geqq3)$

また、$b_n=a_{n+1}=2^n+2\cdot(-1)^n$　$(n\geqq3)$である。

（答）　$a_n=2^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$, $b_n=2^n+2\cdot(-1)^n$　$(n\geqq3)$