

A 2

数 学

(平成 21 年度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を3枚の解答用紙(A 8—1からA 8—3)の5箇所(1枚目は表裏の2箇所、2枚目は表のみ)に必ず記入しなさい。
4. この問題冊子には、問題1, 2, 3, 4, 5があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙(A 8—1からA 8—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

工学部（物質Ⅰ）—1, 2のみ解答。

工学部（その他）—1, 2, 3, 4, 5解答。

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を求めよ。

(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_1^e x^{\frac{1}{n}} \log x \, dx - 1 \right)$$

を求めよ。

2 xy 平面上に曲線 $C: y = x^2$ がある。 C 上の点 $P(t, t^2)$ を次の条件(*)をみたすようにとる。

(*) P 以外の C 上の異なる 2 点 Q, R があり, そこでの C の法線がともに P を通る。

$Q(\alpha, \alpha^2), R(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき, 線分 QR の中点 M が描く軌跡の方程式を求めよ。

(3) β を t の式で表し, 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} t\beta$ を求めよ。

3 赤, 青, 黄の3色を用いて, 横一列に並んだ n 個のマスを, 隣り合うマスは異なる色になるように塗り分ける。ただし, 使わない色があってもよい。両端のマスが同じ色になる場合の数を a_n とし, 両端のマスが異なる色になる場合の数を b_n とする。次の問いに答えよ。

(1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ。

(2) a_n, b_n ($n \geq 3$) を n の式で表せ。

4 xy 平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 1$ がある。 C の外部の点 $P(s, t)$ ($s \neq \pm 1$) から C へ引いた 2 つの接線と直線 $x = 1$ との交点を Q, R とする。 次の問いに答えよ。

(1) 線分 QR の長さを s, t を用いて表せ。

(2) QR の長さが 1 であるように P が動くとき、 P の軌跡を求め、 図示せよ。

5 平面上に3点O, A, Bがあり, $OA = a$, $OB = b$ ($0 < a < b$)で, \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 θ は $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ をみたす。点Cを $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ で定める。また, O から引いた半直線OA上に, 点Pを $OA < OP$ となるようにとる。直線PCと直線OBの交点をQとする。 $AP = x$, $PQ^2 = f(x)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を x と a, b, θ を用いて表せ。

(2) 第2次導関数 $f''(x)$ は, $x > 0$ のとき $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ。

(3) $a = 1$, $b = \sqrt{6}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき, PQの長さの最小値を求めよ。