

$$(1) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \cdots (*) \text{を示す.}$$

$$(左辺) = I \text{ において, } x = \pi - t \text{ と置換 } \therefore dx = -dt \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \pi \\ t & \pi \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \cdot (-1) dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx}_{=I} \end{aligned}$$

$$\text{これより, } 2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \text{ となり, } I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$\therefore$ 題意の (*) は示された

$$(2) \text{ 関数 } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 8} \text{ は連続関数であり, } J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \text{ とおく.}$$

$$(1) \text{ より, } J = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \text{ と表せるから (*) を利用すると}$$

$$J = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{9 - \cos^2 x} dx$$

$$\text{ここで, } \cos x = u \text{ と置換 } \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \pi \\ u & 1 \rightarrow -1 \end{array}$$

$$\therefore -\sin x dx = du$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1-u^2}{9-u^2} \cdot (-1) du = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-u^2}{9-u^2} du \quad (\text{被積分関数は偶関数}) \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1-u^2}{9-u^2} du = \pi \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{8}{(3+u)(3-u)} \right\} du \\ &= \pi - \frac{4}{3} \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3+u} + \frac{1}{3-u} \right) du = \pi \left(1 - \frac{4}{3} \log 2 \right) \end{aligned}$$

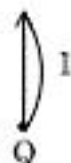
$$\therefore \text{ (答) } J = \pi \left(1 - \frac{4}{3} \log 2 \right)$$

さいころの1~4の目が出る確率はそれぞれ $\frac{p}{2}$ 5, 6の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1-2p}{2}$ である.

(i) 1 or 2

(ii) 3 or 4

(iii) 5 or 6



(1) S が $(1, n-1)$ を含むのは $\dots\dots n+1$ 回中 $\begin{cases} 1 \text{ or } 2 \dots\dots 1 \text{ 回} & (p) \\ 3 \text{ or } 4 \dots\dots n-1 \text{ 回} & (p) \\ 5 \text{ or } 6 \dots\dots 1 \text{ 回} & (1-2p) \end{cases}$

または, n 回中 $\begin{cases} 1 \text{ or } 2 \dots\dots 1 \text{ 回} \\ 3 \text{ or } 4 \dots\dots n-1 \text{ 回} \\ 5 \text{ or } 6 \dots\dots 0 \text{ 回} \end{cases} \times \begin{cases} 1 \text{ or } 2 \dots\dots 1 \text{ 回} \\ (または) \\ 3 \text{ or } 4 \dots\dots 1 \text{ 回} \end{cases}$ だから

求める確率を P とすると

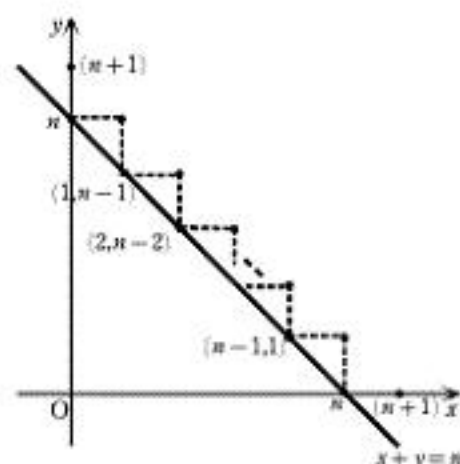
$$\begin{aligned} P &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \cdot p^1 \cdot p^{n-1} \cdot (1-2p)^1 + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot p^1 \cdot p^{n-1} \cdot (p^1 + p^1) \\ &= (n+1)n \cdot p^n (1-2p) + n \cdot p^n \cdot 2p \\ &= np^n (n+1-2np) \end{aligned} \quad \therefore \underline{\text{(答) } P = np^n (n+1-2np)}$$

(2) S が $(k, n-k)$ を含むのは

$n+1$ 回中 $\begin{cases} 1 \text{ or } 2 \dots\dots k \text{ 回} \\ 3 \text{ or } 4 \dots\dots n-k \text{ 回} \\ 5 \text{ or } 6 \dots\dots 1 \text{ 回} \end{cases}$ または,

n 回中 $\begin{cases} 1 \text{ or } 2 \dots\dots k \text{ 回} \\ 3 \text{ or } 4 \dots\dots n-k \text{ 回} \\ 5 \text{ or } 6 \dots\dots 0 \text{ 回} \end{cases} \times \begin{cases} 1 \text{ or } 2 \dots\dots 1 \text{ 回} \\ (または) \\ 3 \text{ or } 4 \dots\dots 1 \text{ 回} \end{cases}$

であり, この確率を p_k とおく.



$$\begin{aligned} P_k &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot p^{n-k} \cdot (1-2p)^1 + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot p^{n-k} \cdot (p^1 + p^1) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} \cdot p^n (1-2p) + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^n \cdot 2p \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^n (n+1-2np) \end{aligned}$$

これより, S が $x+y < n$ だけに含まれる確率は

$$P = 1 - \sum_{k=0}^n P_k = 1 - (2p)^n (n+1-2np)$$

$$\therefore \underline{\text{(答) } P = 1 - (2p)^n (n+1-2np)}$$

(3) 求める期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^n 2^k p_k = \sum_{k=0}^n 2^k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^n (n+1-2np) \\ &= p^n (n+1-2np) \sum_{k=0}^n {}_n C_k 2^k \\ &= p^n (n+1-2np) \cdot (2+1)^n \\ &= (3p)^n (n+1-2np) \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\text{(答) } E = (3p)^n (n+1-2np)}$$

(1) $f(x) = \sin x - x \cos x$ ($0 < x < \pi$) とおく.

$$f'(x) = \cos x - 1 \cdot \cos x - x \cdot (-\sin x)$$

$$= x \sin x > 0$$

これより, $y = f(x)$ は $0 < x < \pi$ で x の単調増加

$$f(x) > f(0) = 0$$

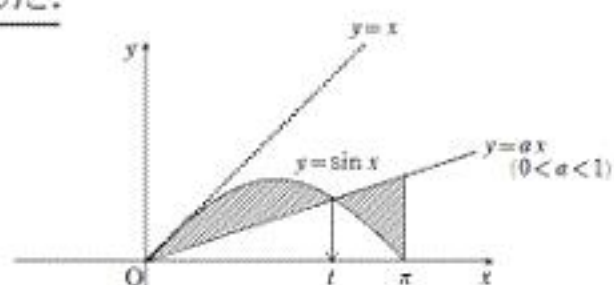
$\therefore \sin x - x \cos x > 0$ ($0 < x < \pi$) は示された.

(2) $0 < a < 1$ に対して,

$\sin x = ax$ を満たす実数 x がただ 1 つ存在.

それを $x = t$ とおく. つまり, $a = \frac{\sin t}{t}$ ($0 < t < \pi$)

.....①



$$I = \int_0^\pi |\sin x - ax| dx$$

$$= \int_0^t (\sin x - ax) dx + \int_t^\pi (ax - \sin x) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{ax^2}{2} \right]_0^t + \left[\frac{ax^2}{2} + \cos x \right]_t^\pi$$

$$= -2\cos t - at^2 + \frac{a\pi^2}{2}$$

$$= -2\cos t - t \sin t + \frac{\pi^2 \sin t}{2t}$$

辺々を t で微分すると,

$$\frac{dI}{dt} = 2\sin t - \sin t - t \cos t + \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\cos t \cdot t - \sin t \cdot 1}{t^2}$$

$$= \sin t - t \cos t - \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^2}$$

$$= \left(t^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^2}$$

ここで, $\frac{\sin t - t \cos t}{t^2} > 0$ であることから

増減表を描くと次の通りとなる.

t	(0)		$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$		(π)
$\frac{dI}{dt}$		-	0	+	
I		$\searrow$	(最小)	$\nearrow$	

増減表より, $t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ のとき I は最小となる.

よって, a の値は

$$\therefore (\text{答}) \quad a = \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(1) 数学的帰納法で示す.

$$「a_n \geq \sqrt{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)」 \dots\dots (*)$$

(I) $n=1$ のとき, $a_1=1$ より $a_1 \geq \sqrt{1}$ は成立

(II) $n=k$ で成立を仮定する. すなわち $a_k \geq \sqrt{k}$ であることを仮定する.

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{k+1} &= a_k + \sqrt{k} \left(1 + \frac{1}{a_k + a_{k+1}} \right) - \sqrt{k+1} \\ &\geq 2\sqrt{k} - \sqrt{k+1} + \frac{\sqrt{k}}{a_k + a_{k+1}} \\ &= \frac{3k-1}{\underbrace{2\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}_{(正)}} + \frac{\sqrt{k}}{\underbrace{a_k + a_{k+1}}_{(正)}} > 0 \quad \therefore a_{k+1} > \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

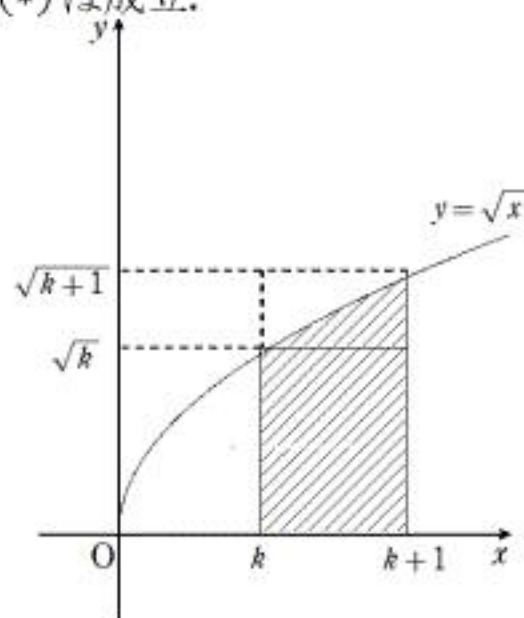
これより, $a_{k+1} \geq \sqrt{k+1}$ が成立し, $n=k+1$ のときも $(*)$ は成立.

以上 (I), (II) より, 題意の $(*)$ は成立.

(2) $y = \sqrt{x}$ は $x \geq 0$ で単調増加

区間 $[k, k+1]$ においてグラフより

$$\sqrt{k} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \dots\dots ①$$

と評価できる.

$n \geq 2$ に対して, ①の辺々 $k=1, 2, 3, \dots, n-1$ まで

代入し和をとると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} &< \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} < \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \\ \therefore \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} &\leq \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \quad (n=2, 3, 4, \dots) \dots\dots ② \text{は示された.} \end{aligned}$$

(3) $a_{k+1} - a_k = \sqrt{k} \left(1 + \frac{1}{a_k + a_{k+1}} \right) \quad (k=1, 2, 3, \dots)$

$k=1, 2, 3, \dots, n-1$ まで代入し辺々和をとる.

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{a_k + a_{k+1}} \\ &\leq \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{a_k + a_{k+1}} \\ &\leq \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{k} \sqrt{k+1} - k) \\ &< \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2} - k \right) \\ &= \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} (n-1) - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n < \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{6} \quad (n \geq 2)$$

$n=1$ のときも, この不等式が成り立つので

$$\therefore \underline{a_n \leq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{6} \quad (n \geq 1)}$$