

数 学

(平成 22 年 度)

〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 解答には黒鉛筆を使用しなさい。
3. 氏名及び受験番号を 3 枚の解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の 5 箇所の記入欄に必ず記入しなさい。(1 枚目, 2 枚目は表裏の 2 箇所, 3 枚目は表のみ)
4. この問題冊子には、問題 1, 2, 3, 4, 5 があります。全ての問題を解答しなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 解答は解答用紙(A 8—1 から A 8—3)の指定箇所(問題番号と一致するところ)に記入しなさい。
7. 下書きにはこの問題冊子の余白を使用しなさい。
8. 試験終了後、問題冊子を持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を連続関数とするとき,

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$$

の値を求めよ。

2 1個のいびつなさいころがある。1, 2, 3, 4の目が出る確率はそれぞれ $\frac{p}{2}$ であり、5, 6の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1-2p}{2}$ である。ただし、 $0 < p < \frac{1}{2}$ とする。このさいころを投げて、 xy 平面上の点 Q を次のように動かす。

- (i) 1または2の目が出たときには、 Q を x 軸の正の方向に1だけ動かす。
- (ii) 3または4の目が出たときには、 Q を y 軸の正の方向に1だけ動かす。
- (iii) 5または6の目が出たときには、 Q を動かさない。

Q は最初原点 $(0, 0)$ にある。このさいころを $(n+1)$ 回投げ、 Q が通った点(原点および Q の最終位置の点を含む)の集合を S とする。ただし、 n は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき、 S が点 $(1, n-1)$ を含む確率を求めよ。
- (2) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき、 S が領域 $x+y < n$ に含まれる確率を求めよ。
- (3) さいころを $(n+1)$ 回投げたとき、 S が点 $(k, n-k)$ を含むならば得点 2^k 点($k=0, 1, \dots, n$)が与えられ、 S が領域 $x+y < n$ に含まれるならば得点0点が与えられるとする。得点の期待値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < \pi$ のとき,

$$\sin x - x \cos x > 0$$

を示せ。

(2) 定積分

$$I = \int_0^{\pi} |\sin x - ax| \, dx \quad (0 < a < 1)$$

を最小にする a の値を求めよ。

4 a, b を正の実数とする。曲線

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

は領域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ に含まれている。次の問いに答えよ。

- (1) (a, b) が存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) C が囲む部分の面積が最大になるときの a, b の値を求めよ。

5 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が, $a_1 = 1$ と関係式

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたしている。次の問いに答えよ。

(1) $a_n \geq \sqrt{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を示せ。

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} (n^{\frac{3}{2}} - 1) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$
を示せ。

(3) $a_n \leq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} n - \frac{1}{6} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
を示せ。